Devoir surveillé n°2

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \qquad B = \frac{2^2 \times 10^3}{16 \times 5^2} \qquad C = 1 + \frac{1+\frac{1}{2}}{2} \qquad D = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

Solution.

$A = \dfrac{1}{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{\frac{5}{6}}$ donc $\boxed{A = \dfrac{6}{5}}$.

$B = \dfrac{2^2 \times (2\times 5)^3}{2^4 \times 5^2} = \dfrac{2^2 \times 2^3 \times 5^{3-2}}{2^4} = \dfrac{2^5 \times 5^1}{2^4} = 2^1 \times 5$ soit $\boxed{B = 10}$.

$C = 1 + \dfrac{1+\frac{\frac{3}{2}}{2}}{2} = 1 + \dfrac{1+\frac{3}{4}}{2} = 1 + \dfrac{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}{2} = 1 + \dfrac{\frac{7}{4}}{2} = 1 + \dfrac{7}{8} = \dfrac{8}{8} + \dfrac{7}{8}$ donc $\boxed{C = \dfrac{15}{8}}$.

$D = \dfrac{5}{7} - \dfrac{5}{14} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{10}{14} - \dfrac{5}{14} - \dfrac{7}{14} = -\dfrac{2}{14}$ donc $\boxed{D = -\dfrac{1}{7}}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : 9x^2 = 0$ $\qquad$ $(E_2) : 2x - x^2 = 0$ $\qquad$ $(E_3) : 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(I_1) : (x+1)(x-3) < 0$ $\qquad$ $(I_2) : (x+1)^2 \geqslant (2x-3)^2$ $\qquad$ $(I_3) : x^2 > 5x - 6.$

Solution.

$(E_1) \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

• $(E_2) \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $2 - x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{0\,;2\}}$.

• $(E_3) : \ 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$ donc (E_3) a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{-3\,;\dfrac{1}{2}\right\}}$.

• Pour résoudre (I_1), étudions le signe de $A(x) = (x+1)(x-3)$.

Signe de $x+1$: $x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$

Signe de $x-3$: $x - 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$

Signe de $A(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-1\,;3[$.

Remarque. On pouvait aussi remarquer que $(x+1)(x-3)$ est la forme factorisée d'un trinôme dont le coefficient dominant est $a=1>0$ et dont les racines sont -1 et 3 donc, par propriété du cours, $(x+1)(x-3)$ est négatif entre les deux racines -1 et 3, ce qui revient à dire que l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-1\,;3[$.

- Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff (x+1)^2-(2x-3)^2\geqslant 0 \iff [(x+1)-(2x-3)]\,[(x+1)+(2x-3)]\geqslant 0\\ &\iff (x+1-2x+3)(x+1+2x-3)\geqslant 0\\ &\iff (-x+4)(3x-2)\geqslant 0.\end{aligned}$$

Étudions le signe de $B(x)=(-x+4)(3x-2)$.

Signe de $-x+4$: $-x+4\geqslant 0 \iff 4\geqslant x \iff x\leqslant 4$

Signe de $3x-2$: $3x-2\geqslant 0 \iff 3x\geqslant 2 \iff x\geqslant \dfrac{2}{3}$

Signe de $B(x)$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
signe de $-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_2) est $\left[\dfrac{2}{3}\,;4\right]$.

- Pour tout réel x,

$$(I_3) \iff x^2-(5x-6)>0 \iff x^2-5x+6>0.$$

Le discriminant du trinôme x^2-5x+6 est $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=1>0$ donc ce trinôme a deux racines réelles :

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1}=2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1}=3$$

Comme $a=1>0$, on en déduit que le trinôme est du signe positif à l'extérieur des racines donc l'ensemble des solutions de (I_3) est $]-\infty\,;2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x| = 3 \qquad (E_2) : |x+2| = 4 \qquad (I_1) : |3x-7| < 4 \qquad (I_2) : |-3x+1| \geqslant 2.$$

Solution.

$(E_1) \iff x = 3$ ou $x = -3$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\{3\,;-3\}$.

$(E_2) \iff x+2 = 4$ ou $x+2 = -4 \iff x = 2$ ou $x = -6$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\{2\,;-6\}$.

$(I_1) \iff -4 < 3x-7 < 4 \iff 3 < 3x < 11 \iff 1 < x < \frac{11}{3}$ (car $3 > 0$)

L'ensemble des solutions de (I_1) est $\left]1\,;\frac{11}{3}\right[$.

$(I_2) \iff -3x+1 \geqslant 2$ ou $-3x+1 \leqslant -2 \iff -3x \geqslant 1$ ou $-3x \leqslant -3 \iff x \leqslant -\frac{1}{3}$ ou $x \geqslant 1$ (car $-3 < 0$)

L'ensemble des solutions de (I_2) est $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup [1\,;+\infty[$.

Exercice 4. On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\,;h\}$ et les parties $A = \{a\,;b\,;e\,;f\}$ et $B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;h\}$ de E.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cap \overline{B}}$.

Solution.

$A \cap B = \{a\,;f\}$
$A \cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;h\}$
$\overline{A} = \{c\,;d\,;g\,;h\}$
$\overline{B} = \{b\,;e\,;g\}$
$\overline{A \cup B} = \{g\}$
$\overline{A} \cap B = \{c\,;d\,;h\}$
$\overline{A \cap B} = \{b\,;c\,;d\,;e\,;g\,;h\}$
$\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;g\,;h\}$

Exercice 5. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x-2} \end{array}$$

1. Calculer l'image de 3 par f.
2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f.
3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. $f(3) = \dfrac{3-1}{3-2} = \dfrac{2}{1}$ donc $f(3) = 2$.

2. On résout $f(x) = 3$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(x) = 3 \iff \frac{x-1}{x-2} = 3 \iff x-1 = 3(x-2) \iff x-1 = 3x-6 \iff 5 = 2x \iff x = \frac{5}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique antécédent de 3 par } f \text{ est } \frac{5}{2}}$.

3. Soit un réel $y \neq 1$. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$y = f(x) \iff y = \frac{x-1}{x-2} \underset{x\neq 2}{\iff} y(x-2) = x-1 \iff yx - 2y = x - 1$$
$$\iff yx - x = 2y - 1 \iff x(y-1) = 2y-1 \underset{y\neq 1}{\iff} x = \frac{2y-1}{y-1}.$$

De plus, pour tout $y \neq 1$, si $\frac{2y-1}{y-1} = 2$ alors $2y-1 = 2(y-1)$ donc $2y-1 = 2y-2$ i.e. $-1 = -2$, ce qui est absurde donc $\frac{2y-1}{y-1} \neq 2$.

Ainsi, tout élément $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet un unique antécédent $x = \frac{2y-1}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x-1} \end{array}}$$

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout réel x, $x^2 + 2x + 7 > 0$.

2. Soit x un réel. Comparer $A = \frac{3x-1}{x^2+1}$ et $B = \frac{x-5}{x^2+5}$.

Solution.

1. Le discriminant du trinôme x^2+2x+7 est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 7 = -24 < 0$ donc, pour tout réel x, x^2+2x+7 est du signe de $a = 1 > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^2+2x+7 > 0}$.

2. Calculons $A - B$:

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{3x-1}{x^2+1} - \frac{x-5}{x^2+5} = \frac{(3x-1)(x^2+5) - (x-5)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+5)} \\ &= \frac{3x^3 + 15x - x^2 - 5 - (x^3 + x - 5x^2 - 5)}{(x^2+1)(x^2+5)} \\ &= \frac{3x^3 + 15x - x^2 - 5 - x^3 - x + 5x^2 + 5}{(x^2+1)(x^2+5)} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 14x}{(x^2+1)(x^2+5)} \\ &= \frac{2x(x^2+2x+7)}{(x^2+1)(x^2+5)}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.**, pour tout réel x, $x^2+2x+7 > 0$. De plus, pour tout réel x, $x^2+1 > 0$ et $x^2+5 > 0$ donc le signe de $A-B$ est le signe de x. Ainsi, $A - B \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ et $A - B \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$. On conclut donc que $\boxed{A \geqslant B \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } A \leqslant B \text{ si } x \leqslant 0}$.