Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : -3x = 0$ $\quad (E_2) : (5-2x)(2x+1) = 0$ $\quad (E_3) : x^2 + 1 = 0$ $\quad (E_4) : x^2 - 5x + 4 = 0$

$(I_1) : 2 - 3x > 0$ $\quad (I_2) : \dfrac{5-x}{3x+4} \geqslant 0$ $\quad (I_3) : x(x-2) > 3(x-2)$ $\quad (I_4) : x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$

Solution.

• $(E_1) \iff \dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{0}{-3} \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

• $(E_2) \iff 5 - 2x = 0$ ou $2x + 1 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right\}}$.

• Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et donc $x^2 + 1 \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \varnothing}$.

• Le discriminant de $x^2 - 5x + 4$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ donc l'équation (E_4) admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 4$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{1 ; 4\}}$.

• $(I_1) \iff 2 > 3x \iff \frac{2}{3} > x$ car $3 > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est } \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[}$.

• Pour (I_2), on commence par déterminer le signe du numérateur et celui du dénominateur :

$$5 - x \geqslant 0 \iff 5 \geqslant x$$

et

$$3x + 4 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant -4 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$$

puis on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{5-x}{3x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est } \left]-\frac{4}{3} ; 5\right]}$.

• $(I_3) \iff x(x-2) - 3(x-2) > 0 \iff (x-3)(x-2) > 0$

On peut alors dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-3)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_3) \text{ est }]-\infty\,;2[\cup[3\,;+\infty[.}$

• Le discriminant de x^2-6x+8 est $\Delta=(-6)^2-4\times1\times8=4>0$ donc le trinôme $x^2-6x+8=0$ possède deux racines réelles : $x_1=\frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\times1}=2$ et $x_2=\frac{-(-6)+\sqrt{2}}{2\times1}=4$. Comme $a=1>0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
signe de x^2-6x+8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_4) \text{ est } [2\,;4].}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x|=1 \qquad (E_2) : |x-4|=2 \qquad (I_1) : |5x-1|<4 \qquad (I_2) : |2x+3|\geqslant 7.$$

Solution.
$(E_1) \iff x=1$ ou $x=-1$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{1\,;-1\}.}$

$(E_2) \iff x-4=2$ ou $x-4=-2 \iff x=6$ ou $x=2$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{6\,;2\}.}$

$(I_1) \iff -4<5x-1<4 \iff -3<5x<5 \iff -\frac{3}{5}<x<1$ (car $5>0$)
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est } \left]-\frac{3}{5}\,;1\right[.}$

$(I_2) \iff 2x+3\geqslant 7$ ou $2x+3\leqslant -7 \iff 2x\geqslant 4$ ou $2x\leqslant -10 \iff x\geqslant 2$ ou $x\leqslant -5$ (car $2>0$)
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est }]-\infty\,;-5]\cup[2\,;+\infty[.}$

Exercice 3. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. E_1 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des cubes d'entiers.
2. E_2 est l'ensemble des fractions d'entiers dont le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur.
3. E_3 est l'ensemble des réels qui sont strictement supérieur à leurs doubles.
4. E_4 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des puissances de 2.

Solution. $E_1=\{n^3 \mid n\in\mathbb{N}\}$, $E_2=\{\frac{a}{b} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \text{ et } a\geqslant b\}$, $E_3=\{x\in\mathbb{R} \mid x>2x\}$ et $E_4=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Exercice 4. Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, on considère les parties $A = \{a, b, d, f\}$ et $B = \{b, c, f, g, h\}$.
Déterminer : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{\overline{A} \cup B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Solution.
$A \cap B = \{b\,;f\}$
$A \cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;f\,;g\,;h\}$
$\overline{A} = \{c\,;e\,;g\,;h\}$
$\overline{B} = \{a\,;d\,;e\}$
$\overline{\overline{A} \cup B} = \{a\,;d\}$
$A \setminus B = \{a\,;d\}$
$B \setminus A = \{c\,;g\,;h\}$
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a\,;c\,;d\,;g\,;h\}$

Exercice 5.

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x,

$$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

   b. Dans quel cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

2. Déduire de la question **1.a.** que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$x^2 + \frac{1}{(2x)^2} \geqslant 1.$$

Solution.

1. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{1}{4} - x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - x^2) = x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

   donc $\frac{1}{4} \geqslant x(1-x)$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}}$.

   b. L'inégalité précédente est un égalité si et seulement si $\frac{1}{4} - x(1-x) = 0$ ce qui équivaut à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ soit encore $x = \frac{1}{2}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{l'inégalité est une égalité si et seulement si } x = \frac{1}{2}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après la question **1.a.**, $x^2(1-x^2) \leqslant \frac{1}{4}$ donc, en divisant par $x^2 > 0$, $1 - x^2 \leqslant \frac{1}{4x^2}$ et donc $1 \leqslant x^2 + \frac{1}{4x^2}$. De plus, $4x^2 = 2^2x^2 = (2x)^2$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 0,\ x^2 + \frac{1}{(2x)^2} \geqslant 1}$.

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B et C des parties de E.

1. Démontrer l'égalité : $\overline{B} \setminus \overline{A} = A \setminus B$.

2. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

Solution.

1. $\overline{B} \setminus \overline{A} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cap A = A \cap \overline{B} = A \setminus B$ donc $\boxed{\overline{B} \setminus \overline{A} = A \setminus B}$.

2. Supposons que $A \cup B = B$. Soit $x \in A$. Alors, $x \in A \cup B$ donc, comme $A \cup B = B$, $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
Réciproquement supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cup B$. Alors, $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, comme $A \subset B$, $x \in B$ donc, dans tous les cas, $x \in B$. Ainsi, $A \cup B \subset B$. Réciproquement, si $x \in B$ alors, par définition, $x \in A \cup B$ donc $B \subset A \cup B$. Par le principe de double-inclusion, on conclut que $A \cup B = B$.
Ainsi, on a bien montré l'équivalence :

$$\boxed{A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B}.$$