

Devoir surveillé n°2

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes d'inconnue x .

$$(E_1) : -3x = 0 \quad (E_2) : (5 - 2x)(2x + 1) = 0 \quad (E_3) : x^2 + 1 = 0 \quad (E_4) : x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(I_1) : 2 - 3x > 0 \quad (I_2) : \frac{5 - x}{3x + 4} \geqslant 0 \quad (I_3) : x(x - 2) > 3(x - 2) \quad (I_4) : x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$$

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes d'inconnue x .

$$(E_1) : |x| = 1 \quad (E_2) : |x - 4| = 2 \quad (I_1) : |5x - 1| < 4 \quad (I_2) : |2x + 3| \geqslant 7.$$

Exercice 3. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. E_1 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des cubes d'entiers.
2. E_2 est l'ensemble des fractions d'entiers dont le numérateur est supérieur ou égal au dénominateur.
3. E_3 est l'ensemble des réels qui sont strictement supérieur à leurs doubles.
4. E_4 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des puissances de 2.

Exercice 4. Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, on considère les parties $A = \{a, b, d, f\}$ et $B = \{b, c, f, g, h\}$.

Déterminer : $A \cap B$, $A \cup B$, \overline{A} , $\overline{\overline{A} \cup B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 5.

1. a. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

- b. Dans quel cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?
2. Déduire de la question 1.a. que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$x^2 + \frac{1}{(2x)^2} \geqslant 1.$$

Exercice 6. Soit E un ensemble et A , B et C des parties de E .

1. Démontrer l'égalité : $\overline{B} \setminus \overline{A} = A \setminus B$.

2. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = B \iff A \subset B.$$