Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : 7x = 0$ $\quad (E_2) : (5-x)(2x+6) = 0$ $\quad (E_3) : 6x^2 - x^3 = 0$ $\quad (E_4) : x^2 + 5x - 6 = 0$

$(I_1) : 5x - 3 < 0$ $\quad (I_2) : \dfrac{5x-4}{3x+1} \leqslant 0$ $\quad (I_3) : (3x+1)^2 > (2-x)^2$ $\quad (I_4) : x^2 - 2x + 3 \geqslant 0$

Solution.

$(E_1) \iff \dfrac{7x}{7} = \dfrac{0}{7} \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

$(E_2) \iff 5 - x = 0$ ou $2x + 6 = 0 \iff 5 = x$ ou $x = -\frac{6}{2} \iff x = 5$ ou $x = -3$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{5\,;-3\}}$.

$(E_3) \iff x^2(6-x) = 0 \iff x^2 = 0$ ou $6 - x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{0\,;6\}}$.

Le discriminant de $x^2 + 5x - 6$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 > 0$ donc l'équation (E_4) admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 1} = -6$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 1} = 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-6\,;1\}}$.

Par propriété, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{3}{5}\right[}$.

Pour (I_2), on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
signe de $5x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{5x-4}{3x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est } \left]-\frac{1}{3}\,;\frac{4}{5}\right].}$

$$\begin{aligned}(I_3) &\iff (3x+1)^2 - (2-x)^2 > 0\\ &\iff [(3x+1)-(2-x)][(3x+1)+(2-x)] > 0\\ &\iff (4x-1)(2x+3) > 0\end{aligned}$$

On peut alors dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
signe de $4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(4x-1)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_3) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[}.$

Le discriminant de $x^2 - 2x + 3$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$ donc, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_4) \text{ est } \mathbb{R}.}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x| = 4 \qquad (E_2) : |x-3| = 2 \qquad (I_1) : |5-2x| < 7 \qquad (I_2) : |2x-5| \geqslant 3.$$

Solution.

$(E_1) \iff x = 4$ ou $x = -4$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{4\,;-4\}.}$

$(E_2) \iff x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2 \iff x = 5$ ou $x = 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{5\,;1\}.}$

$(I_1) \iff -7 < 5 - 2x < 7 \iff -12 < -2x < 2 \underset{-2<0}{\iff} \frac{-12}{-2} > x > \frac{2}{-2} \iff -1 < x < 6$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est }]-1\,;6[.}$

$(I_2) \iff 2x - 5 \geqslant 3$ ou $2x - 5 \leqslant -3 \iff 2x \geqslant 8$ ou $2x \leqslant 2 \underset{2>0}{\iff} x \geqslant 4$ ou $x \leqslant 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est }]-\infty\,;1] \cup [4\,;+\infty[.}$

Exercice 3. Pour tout réel x, on pose $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 27x^2 + 17x - 3$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $P(x) = (2x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 8x - 3)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x.

3. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $P(x)$ en fonction de x.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}(2x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 8x - 3) &= 6x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 9x^3 - 24x^2 + 9x + 3x^2 + 8x - 3 \\ &= 6x^4 + 7x^3 - 27x^2 + 17x - 3 \\ &= P(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 27x^2 + 17x - 3}.$

2. On déduit de la question précédente que, pour tout réel x,

$$P(x) = 0 \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ ou } 3x^2 + 8x - 3 = 0.$$

Le discriminant de $2x^2 - 3x + 1$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelle distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 2$$

Le discriminant de $3x^2 + 8x - 3$ est $\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelle distinctes :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

On conclut donc que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } P(x) = 0 \text{ est } \left\{\frac{1}{2}\,;2\,;-3\,;\frac{1}{3}\right\}}.$

3. Pour déterminer le signe de $P(x)$ en fonction du réel x, on peut utiliser un tableau de signe,

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
signe de $2x^2-3x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $3x^2+8x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on conclut que $\boxed{P(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-3\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[}$ et que $\boxed{P(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-3\,;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;2\right]}$.

Exercice 4. On s'intéresse à l'inéquation (I) : $|2x-4| < |3-x|$.

1. Déterminer le signe de $2x-4$ puis le signe de $3-x$ en fonction du réel x.

2. Justifier que, si $x \in \left]3\,;+\infty\right[$, (I) se réécrit $2x-4 < x-3$ et en déduire que (I) n'a pas de solution dans $\left]3\,;+\infty\right[$.

3. En raisonnant de même, résoudre (I) sur $[2\,;3]$ puis sur $\left[-\infty\,;2\right[$.

4. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (I) sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Par propriété, $2x-4 \geqslant 0$ si $x \in \left[2\,;+\infty\right[$ et $2x-4<0$ si $x \in \left]-\infty\,;2\right[$. De même, $3-x \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;3\right]$ et $3-x<0$ si $x \in \left]3\,;+\infty\right[$.

2. Si $x \in \left]3\,;+\infty\right[$ alors $2x-4 \geqslant 0$ donc $|2x-4| = 2x-4$ et $3-x<0$ donc $|3-x| = -(3-x) = x-3$. Ainsi, dans ce cas, (I) se réécrit $2x-4 < x-3$ donc, pour tout $x>3$,

$$(I) \iff 2x-4 < x-3 \iff x < 1$$

ce qui est impossible car $x>3$. Ainsi, $\boxed{(I) \text{ n'a pas de solution dans } \left]3\,;+\infty\right[}$.

3. Si $x \in [2\,;3]$ alors $2x-4 \geqslant 0$ donc $|2x-4| = 2x-4$ et $3-x \geqslant 0$ donc $|3-x| = 3-x$. Ainsi, dans ce cas, (I) se réécrit $2x-4 < 3-x$ donc, pour tout $x \in [2\,;3]$,

$$(I) \iff 2x-4 < 3-x \iff 3x < 7 \underset{3>0}{\iff} x < \frac{7}{3}$$

Comme $2 < \frac{7}{3} < 3$, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions}(I) \text{ sur } [2\,;3] \text{ est } \left[2\,;\frac{7}{3}\right[}$.

Si $x \in \left]-\infty\,;2\right[$ alors $2x-4<0$ donc $|2x-4| = -(2x-4) = 4-2x$ et $3-x \geqslant 0$ donc $|3-x| = 3-x$. Ainsi, dans ce cas, (I) se réécrit $4-2x < 3-x$ donc, pour tout $x \in \left]-\infty\,;2\right[$,

$$(I) \iff 4-2x < 3-x \iff 1 < x$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions}(I) \text{ sur } \left]-\infty\,;2\right[\text{ est } \left]1\,;2\right]}$.

4. Par disjonction de cas, on conclut que l'ensemble des solutions de I sur $\mathbb{R}$ est $]1\,;2] \cup \left[2\,;\dfrac{7}{3}\right[$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left]1\,;\dfrac{7}{3}\right[}$.

Exercice 5.

1. **a.** Démontrer que, pour tous réels x et y,

$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

   b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

2. **a.** Déduire de la question **1.a.** que, pour tous réels a, b et c,

$$ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

   b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

Solution.

1. **a.** Soit x et y deux réels. Alors,

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} = \frac{(x - y)^2}{2} \geqslant 0$$

car le carré d'un réel est positif. Ainsi, $\boxed{\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geqslant xy}$.

   b. L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $(x-y)^2 = 0$ i.e. $x-y = 0$ soit encore $x = y$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = xy \text{ si et seulement si } x = y}$.

2. **a.** D'après la question **1.a.**, pour tous réels a, b et c,

$$ab + bc + ac \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2) = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tous réels } a,\ b \text{ et } c,\ ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2}$.

   b. L'inégalité précédente et une égalité si et seulement si chacune des trois inégalités $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, $bc \leqslant \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$ et $ac \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + c^2)$ est une égalité donc, d'après la question **1.b.**, si et seulement si $a = b$, $b = c$ et $a = c$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'inégalité de la question \textbf{2.a.} est une égalité si et seulement si } a = b = c}$.

Exercice 6. Soit x un réel. Comparer $A = \dfrac{1}{(2+x^2)^2}$ et $B = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{2+x^2}$.

Solution. Afin de comparer A et B, calculons $A - B$:

$$\begin{aligned}
A - B &= \frac{1}{(2+x^2)^2} - \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2+x^2} \\
&= \frac{1+x^2-(2+x^2)^2+(1+x^2)(2+x^2)}{(1+x^2)(2+x^2)^2} \\
&= \frac{1+x^2-(4+4x^2+x^4)+2+x^2+2x^2+x^4}{(1+x^2)(2+x^2)^2} \\
&= \frac{1+x^2-4-4x^2-x^4+2+3x^2+x^4}{(1+x^2)(2+x^2)^2} \\
&= \frac{-1}{(1+x^2)(2+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Or, $1+x^2>0$ et $2+x^2)^2>0$ donc $A-B<0$ et on conclut que $\boxed{A<B}$.