TB1 **lundi 14 octobre 2024**

Devoir surveillé n°2

Durée : 1h45

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : 7x = 0 \qquad (E_2) : (5-x)(2x+6) = 0 \qquad (E_3) : 6x^2 - x^3 = 0 \qquad (E_4) : x^2 + 5x - 6 = 0$

$(I_1) : 5x - 3 < 0 \qquad (I_2) : \dfrac{5x-4}{3x+1} \leqslant 0 \qquad (I_3) : (3x+1)^2 > (2-x)^2 \qquad (I_4) : x^2 - 2x + 3 \geqslant 0$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x| = 4 \qquad (E_2) : |x-3| = 2 \qquad (I_1) : |5-2x| < 7 \qquad (I_2) : |2x-5| \geqslant 3.$$

Exercice 3. Pour tout réel x, on pose $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 27x^2 + 17x - 3$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $P(x) = (2x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 8x - 3)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x.
3. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $P(x)$ en fonction de x.

Exercice 4. On s'intéresse à l'inéquation $(I) : |2x-4| < |3-x|$.

1. Déterminer le signe de $2x - 4$ puis le signe de $3 - x$ en fonction du réel x.
2. Justifier que, si $x \in]3\,;+\infty[$, (I) se réécrit $2x - 4 < x - 3$ et en déduire que (I) n'a pas de solution dans $]3\,;+\infty[$.
3. En raisonnant de même, résoudre (I) sur $[2\,;3]$ puis sur $]-\infty\,;2[$.
4. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (I) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

1. **a.** Démontrer que, pour tous réels x et y,
$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$
   b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?
2. **a.** Déduire de la question **1.a.** que, pour tous réels a, b et c,
$$ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$
   b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

Exercice 6. Soit x un réel. Comparer $A = \dfrac{1}{(2+x^2)^2}$ et $B = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{2+x^2}$.