Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : 5x = 0$ $\quad (E_2) : (2-x)(3x+1) = 0$ $\quad (E_3) : 4x - x^3 = 0$ $\quad (E_4) : x^2 + 2x - 3 = 0$

$(I_1) : 3x - 5 > 0$ $\quad (I_2) : \dfrac{3x-4}{2x+1} \geqslant 0$ $\quad (I_3) : x^2(x+1) > 9(x+1)$ $\quad (I_4) : x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

Solution.

$(E_1) \iff \dfrac{5x}{5} = \dfrac{0}{5} \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

$(E_2) \iff 2 - x = 0 \text{ ou } 3x + 1 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{2\,;-\frac{1}{3}\}}$.

$(E_3) \iff x(4 - x^2) = 0 \iff x(2-x)(2+x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 2 - x = 0 \text{ ou } 2 + x = 0$
$\iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{0\,;2\,;-2\}}$.

Le discriminant de $x^2 + 2x - 3$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc l'équation (E_4) admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-3\,;1\}}$.

Par propriété, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est } \left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[}$.

Pour (I_2), on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{3x-4}{2x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[}$.

$(I_3) \iff x^2(x+1) - 9(x+1) > 0 \iff (x^2 - 9)(x+1) > 0 \iff (x-3)(x+3)(x+1) > 0$
On peut alors dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
signe de $x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + 3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-3)(x+3)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_3) \text{ est }]-3\,;-1[\,\cup\,[3\,;+\infty[.}$

Le discriminant de x^2-5x+6 est $\Delta = (-5)^2-4\times1\times6 = 1 > 0$ donc l'équation $x^2-5x+6=0$ possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1} = 3$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_4) \text{ est } [2\,;3].}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x| = 5 \qquad (E_2) : |x-2| = 3 \qquad (I_1) : |2-5x| < 1 \qquad (I_2) : |2x-3| \geqslant 1.$$

Solution.
$(E_1) \iff x = 5$ ou $x = -5$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{5\,;-5\}.}$

$(E_2) \iff x-2 = 3$ ou $x-2 = -3 \iff x = 5$ ou $x = -1$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{5\,;-1\}.}$

$(I_1) \iff -1 < 2-5x < 1 \iff -3 < -5x < -1 \iff \frac{3}{5} > x > \frac{1}{5}$ (car $-5 < 0$)
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est } \left]\frac{1}{5}\,;\frac{3}{5}\right[.}$

$(I_2) \iff 2x-3 \geqslant 1$ ou $2x-3 \leqslant -1 \iff 2x \geqslant 4$ ou $2x \leqslant 2 \iff x \geqslant 2$ ou $x \leqslant 1$ (car $2 < 0$)
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est }]-\infty\,;1]\cup[2\,;+\infty[.}$

Exercice 3. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. E_1 est l'ensemble des entiers naturels qui sont impairs.
2. E_2 est l'ensemble des entiers relatifs qui sont des multiples de 7.
3. E_3 est l'ensemble des réels qui sont strictement plus grands que leurs carrés moins 1.
4. E_4 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des cubes d'entiers naturels.

Solution. $E_1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $E_2 = \{7n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > x^2+1\}$ et $E_4 = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4. On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\,;h\}$ et les parties $A = \{a\,;b\,;e\,;f\}$ et $B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;h\}$ de E.

Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A\cap\overline{B}}$.

Solution.
$A\cap B = \{a\,;f\}$
$A\cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;h\}$
$\overline{A} = \{c\,;d\,;g\,;h\}$
$\overline{B} = \{b\,;e\,;g\}$
$\overline{A\cup B} = \{g\}$
$\overline{A}\cap B = \{c\,;d\,;h\}$
$\overline{A\cap B} = \{b\,;c\,;d\,;e\,;g\,;h\}$
$\overline{A\cap\overline{B}} = \overline{A}\cup B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;g\,;h\}$

Exercice 5.

1. Étudier le signe de $m^2 - 10m + 9$ en fonction du réel m.
2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (E_m) suivante d'inconnue x :

$$(E_m) : x^2 + (m-3)x + m = 0$$

   a. Calculer le discriminant de $x^2 + (m-3)x + m$.

   b. Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de solutions de (E_m).

Solution.

1. Le discriminant de $m^2 - 10m + 9$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 64 > 0$ donc l'équation $m^2 - 10m + 9 = 0$ possède deux solutions réelles : $m_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2\times 1} = 1$ et $m_2 = \frac{-(-10)+\sqrt{64}}{2\times 1} = 9$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $m^2 - 10m + 9 \geqslant 0$ si $m \in \left]-\infty\,;1\right] \cup \left[9\,;+\infty\right[$ et $m^2 - 10m + 9 \leqslant 0$ si $m\,[1\,;9]$.
2. **a.** Le discriminant de $x^2 + (m-3)x + m$ est $\delta_m = (m-3)^2 - 4m = m^2 - 6m + 9 - 4m = m^2 - 10m + 9$.

   b. On déduit de la question **1.** que $\Delta_m > 0$ si $m \in \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]9\,;+\infty\right[$, $\Delta_m = 0$ si $m \in \{1 : 9\}$ et $\Delta_m < 0$ si $m \in \left]1\,;9\right[$ donc (E_m) possède deux solutions réelles si $m \in \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]9\,;+\infty\right[$, une unique solutions réelle si $m \in \{1 : 9\}$ et aucun solution réelle si $m \in \left]1\,;9\right[$.

Exercice 6.

1. **a.** Démontrer que, pour tous réels strictement positifs x et y,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

   b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?
2. **a.** Soit a, b et c des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité précédente successivement avec $x = a+b$ et $y = a+c$ puis $x = b+c$ et $y = a+b$ et enfin $x = b+c$ et $y = a+c$, montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solution.

1. **a.** Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0$$

   car le carré d'un réel est positif et $xy > 0$ puisque $x > 0$ et $y > 0$. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0,\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2}$.

   b. L'inégalité est une égalité si et seulement si $\dfrac{(x-y)^2}{xy} = 0$ ce qui équivaut à $(x-y)^2 = 0$ i.e. $x - y = 0$ soit $x = y$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'inégalité est une égalité si et seulement si } x = y}$.

2. Pour $x = a + b$ et $y = a + c$, on obtient $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} \geqslant 2$, pour $x = b + c$ et $y = a + b$, on obtient $\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} \geqslant 2$ et, pour $x = b + c$ et $y = a + c$, on obtient $\frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} \geqslant 2$. En additionnant membre à membre ces trois inégalités, on obtient :

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} \geqslant 6.$$

Ainsi, en rassemblant les fractions ayant le même dénominateur,

$$\frac{a+b+b+c}{a+c} + \frac{a+c+b+c}{a+b} + \frac{a+b+a+c}{b+c} \geqslant 6.$$

i.e.

$$\frac{2b+a+c}{a+c} + \frac{2c+a+b}{a+b} + \frac{2a+b+c}{b+c} \geqslant 6.$$

On en déduit que

$$\frac{2b}{a+c} + 1 + \frac{2c}{a+b} + 1 + \frac{2a}{b+c} + 1 \geqslant 6$$

donc

$$\frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} \geqslant 3$$

et, en divisant par $2 > 0$,

$$\boxed{\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{3}{2}}.$$

Exercice 7. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Solution.

Soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Alors, $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. Si $x \in A \setminus B$ alors $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$ et ainsi $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Si $x \in B \setminus A$ alors $x \in B$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A$ donc $x \notin A \cap B$ et ainsi $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On a donc montré que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Inversement, considérons $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Alors, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Comme $x \in A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$ alors, comme $x \notin A \cap B$, $x \notin B$ donc $x \in A \setminus B$. De même, si $x \in B$, comme $x \notin A \cap B$, $x \notin A$ donc $x \in B \setminus A$. Ainsi, dans tous les cas, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. On a donc montré que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Par le principe de double inclusion, on conclut que

$$\boxed{(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}.$$