TB1 **lundi 16 octobre 2023**

Devoir surveillé n°2

Durée : 1h45

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$(E_1) : 5x = 0$ $\qquad (E_2) : (2-x)(3x+1) = 0$ $\qquad (E_3) : 4x - x^3 = 0$ $\qquad (E_4) : x^2 + 2x - 3 = 0$

$(I_1) : 3x - 5 > 0$ $\qquad (I_2) : \dfrac{3x-4}{2x+1} \geqslant 0$ $\qquad (I_3) : x^2(x+1) > 9(x+1)$ $\qquad (I_4) : x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : |x| = 5 \qquad (E_2) : |x-2| = 3 \qquad (I_1) : |2-5x| < 1 \qquad (I_2) : |2x-3| \geqslant 1.$$

Exercice 3. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. E_1 est l'ensemble des entiers naturels qui sont impairs.

2. E_2 est l'ensemble des entiers relatifs qui sont des multiples de 7.

3. E_3 est l'ensemble des réels qui sont strictement plus grands que leurs carrés moins 1.

4. E_4 est l'ensemble des entiers naturels qui sont des cubes d'entiers naturels.

Exercice 4. On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\,;h\}$ et les parties $A = \{a\,;b\,;e\,;f\}$ et $B = \{a\,;c\,;d\,;f\,;h\}$ de E.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cap \overline{B}}$.

Exercice 5.

1. Étudier le signe de $m^2 - 10m + 9$ en fonction du réel m.

2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (E_m) suivante d'inconnue x :

$$(E_m) : x^2 + (m-3)x + m = 0$$

a. Calculer le discriminant de $x^2 + (m-3)x + m$.

b. Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de solutions de (E_m).

Exercice 6.

1. a. Démontrer que, pour tous réels strictement positifs x et y,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

b. Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

2. a. Soit a, b et c des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité précédente successivement avec $x = a+b$ et $y = a+c$ puis $x = b+c$ et $y = a+b$ et enfin $x = b+c$ et $y = a+c$, montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 7. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$