Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure 30 (10h30-12h)

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \qquad B = \frac{25}{36} \times \frac{42}{15} \qquad C = \frac{\frac{5}{16} - \frac{7}{8}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}}.$$

Solution.

$A = \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{4}{12}$ soit $\boxed{A = -\frac{1}{3}}$

$B = \frac{25}{36} \times \frac{42}{15} = \frac{\cancel{5} \times 5}{\cancel{6} \times 6} \times \frac{\cancel{6} \times 7}{3 \times \cancel{5}}$ soit $\boxed{B = \frac{35}{18}}$.

$C = \frac{\frac{5}{16} - \frac{7}{8}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{16} - \frac{14}{16}}{\frac{12}{20} - \frac{9}{20}} = \frac{-\frac{9}{16}}{-\frac{3}{20}} = \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{4} \times 4} \times \frac{\cancel{4} \times 5}{\cancel{3} \times 1}$ soit $\boxed{C = \frac{15}{4}}$.

Exercice 2. Développer, réduire et ordonner les expression suivantes.

$$A(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \qquad B(x) = (1 - 5x)^2 \qquad C(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

Solution.

$A(x) = x^2 - \sqrt{3}^2$ donc $\boxed{A(x) = x^2 - 3}$.

$B(x) = 1^2 - 2 \times 1 \times 5x + (5x)^2$ donc $\boxed{B(x) = 25x^2 - 10x + 1}$.

$C(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1$ donc $\boxed{C(x) = x^4 - 1}$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) \ : \ 3x = 0 \qquad (E_2) \ : \ (3x + 1)(5 - 2x) = 0$$
$$(E_3) \ : \ (2x + 3)^2 = (2 - 3x)^2 \qquad (E_4) \ : \ (x + 1)^2 - 4(x + 1)^3 = 0$$

Solution.

$(E_1) \iff x = \frac{0}{3} \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

$(E_2) \iff 3x + 1 = 0 \text{ ou } 5 - 2x = 0 \iff 3x = -1 \text{ ou } 5 = 2x \iff x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{5}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{-\frac{1}{3}\,;\frac{5}{2}\right\}}$.

$$(E_3) \iff (2x+3)^2-(2-3x)^2=0 \iff [(2x+3)-(2-3x)]\,[(2x+3)+(2-3x)]=0$$
$$\iff (2x+3-2+3x)(2x+3+2-3x)=0 \iff (5x+1)(-x+5)=0$$
$$\iff 5x+1=0 \text{ ou } -x+5=0 \iff 5x=-1 \text{ ou } 5=x$$
$$\iff x=-\frac{1}{5} \text{ ou } x=5$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{-\frac{1}{5}\,;5\right\}$.

$$(E_4) \iff (x+1)^2-4(x+1)^3=0 \iff (x+1)^2\times 1-4(x+1)\times(x+1)^2=0$$
$$\iff (x+1)^2(2-4(x+1))=0 \iff (x+1)^2(1-4x-4)=0$$
$$\iff (x+1)^2(-4x-3)=0 \iff (x+1)^2=0 \text{ ou } -4x-3=0$$
$$\iff x+1=0 \text{ ou } -3=4x$$
$$\iff x=-1 \text{ ou } x=-\frac{3}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{-1\,;-\frac{3}{4}\right\}$.

Exercice 4. On pose, pour tout réel x, $Q(x)=2x^3-3x^2-5x+6$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $Q(x)=(2x+3)(x^2-3x+2)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$ d'inconnue x.

3. On considère la proposition suivante :

$$P : \text{« Pour tout réel } x, \text{ si } Q(x)=0 \text{ alors } x \text{ est rationnel. »}.$$

a. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?

b. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?

c. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

Solution.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors,

$$(2x+3)(x^2-3x+2)=2x^3-6x^2+4x+3x^2-9x+6=2x^3-3x^2-5x+6$$

donc $Q(x)=(2x+3)(x^2-3x+2)$.

2. par la question précédente, pour tout réel x,

$$Q(x)=0 \iff 2x+3=0 \text{ ou } x^2-3x+2=0.$$

D'une part, $2x+3=0$ si et seulement si $x=-\frac{3}{2}$.

D'autre part, le discriminant de x^2-3x+2 est $\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$ donc l'équation $x^2-3x+2=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3-1}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3+1}{2}=2.$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{-\frac{3}{2}\,;1\,;2\right\}$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $Q(x) = 0$. Alors, d'après la question précédente, $x \in \left\{-\frac{3}{2}\,;1\,;2\right\}$ donc, dans tous les cas, x est rationnel. Ainsi, $\boxed{P \text{ est vraie}}$.

b. La réciproque de P est

« Pour tout réel x, si x est rationnel alors $Q(x) = 0$. »

Cette réciproque est fausse car si $x = 1$ alors x est rationnel mais $Q(-1) = 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 6 = 6 \neq 0$. Ce contre-exemple montre que $\boxed{\text{la réciproque de } P \text{ est fausse}}$.

c. La négation de P est

« Il existe un réel x tel que $Q(x) = 0$ et x est irrationnel ».

Comme P est vraie, par définition, $\boxed{\text{non}(P) \text{ est fausse}}$.

Exercice 5. On considère le réel $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

1. Démontrer que $A = \sqrt{2} - 1$.

2. En raisonnant par l'absurde, démontrer que A est irrationnel.

Solution.

1. Étant donné que

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$$

on a bien $\boxed{A = \sqrt{2} - 1}$.

2. Supposons, par l'absurde, que A soit rationnel. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $A = \dfrac{a}{b}$ donc, par la question précédente, $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{a}{b}$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{a+b}{b}$. Or, $a + b \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ donc $\sqrt{2}$ est rationnel. Or, $\sqrt{2}$ est irrationnel donc on aboutit à une contradiction. Ainsi, $\boxed{A \text{ est irrationnel}}$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \dfrac{0}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{2}{2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$.

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

Solution.

1. Par définition, $S_0 = \dfrac{0}{2^0}$ donc $\boxed{S_0 = 0}$, $S_1 = \dfrac{0}{2^0} + \dfrac{1}{2^1}$ donc $\boxed{S_1 = \dfrac{1}{2}}$, $S_2 = \dfrac{0}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{2}{2^2} = 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$ i.e. $\boxed{S_2 = 1}$ et, enfin, $S_3 = \dfrac{0}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} = 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{8}{8} + \dfrac{3}{8}$ i.e. $\boxed{S_3 = \dfrac{11}{8}}$.

2. Par définition,

$$S_{n+1} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \underbrace{\frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}}_{S_n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

donc $\boxed{S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ « \ S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ ».$$

• **Initialisation.** D'une part, $S_0 = 0$ et, d'autre part, $2 - \frac{0+2}{2^0} = 2 - 2 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, on sait que $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et on veut montrer que $S_{n+1} = 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}}$ i.e. $S_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$. Or, par la question **2.**,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2(n+2)+n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n = 2 - \frac{n+1}{2^n}}.$$