Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure 30 (10h30-12h)

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \qquad B = \frac{25}{36} \times \frac{42}{15} \qquad C = \frac{\frac{5}{16} - \frac{7}{8}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}}.$$

Exercice 2. Développer, réduire et ordonner les expression suivantes.

$$A(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \qquad B(x) = (1 - 5x)^2 \qquad C(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) \ : \ 3x = 0 \qquad (E_2) \ : \ (3x + 1)(5 - 2x) = 0$$
$$(E_3) \ : \ (2x + 3)^2 = (2 - 3x)^2 \qquad (E_4) \ : \ (x + 1)^2 - 4(x + 1)^3 = 0$$

Exercice 4. On pose, pour tout réel x, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $Q(x) = (2x + 3)(x^2 - 3x + 2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$ d'inconnue x.
3. On considère la proposition suivante :

   P : « Pour tout réel x, si $Q(x) = 0$ alors x est rationnel. ».

   a. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?
   b. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?
   c. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 5. On considère le réel $A = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

1. Démontrer que $A = \sqrt{2} - 1$.
2. En raisonnant par l'absurde, démontrer que A est irrationnel.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \dfrac{0}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{2}{2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$.

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \dfrac{n + 2}{2^n}$.