Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure 30 (10h30-12h)

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{4} - \frac{13}{12} \qquad B = \frac{17}{45} \times \frac{18}{34} \qquad C = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{5}}{\frac{7}{3} - \frac{3}{7}}.$$

Solution.
$A = \frac{3}{12} - \frac{13}{12} = -\frac{10}{12}$ donc $\boxed{A = -\frac{5}{6}}$.

$B = \frac{17 \times 1}{9 \times 5} \times \frac{9 \times 2}{17 \times 2} = \frac{1}{5}$ donc $\boxed{B = \frac{1}{5}}$.

$C = \frac{\frac{3}{12} - \frac{8}{12}}{\frac{7}{6} - \frac{9}{6}} = \frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{2}{6}} = \frac{5}{12} \times \frac{6}{2} = \frac{5}{3 \times 4} \times 3$ donc $\boxed{C = \frac{5}{4}}$.

Exercice 2. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x les expressions suivantes.

$$A(x) = (2 - x)(3x - 7) \qquad B(x) = (2x - 3)^2$$
$$C(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \qquad D(x) = 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)(3x - 5)$$

Solution.
$A(x) = 6x - 14 - 3x^2 + 7x$ donc $\boxed{A(x) = -3x^2 + 13x - 14}$.
$B(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$ donc $\boxed{B(x) = 4x^2 - 12x + 9}$.
$C(x) = (x^2 - 2x - x + 2)(x - 3) = (x^2 - 3x + 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6$ donc $\boxed{C(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.
$D(x) = (2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$ donc $\boxed{D(x) = 6x^2 - 7x - 5}$.

Exercice 3. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

$$A(x) = (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(3x - 7) \qquad B(x) = (x - 2)^2 - (3x + 1)^2$$
$$C(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad D(x) = 4x^2 - 4x + 1$$
$$E(x) = 9(x + 2)^2 - 16(x - 1)^2 \qquad F(x) = 2x - 1 + (x + 7)(3 - 6x)$$

Solution.
$A(x) = (2x+1)\left[(x+3)-(3x-7)\right] = (2x+1)(x+3-3x+7) = (2x+1)(-2x+10)$ donc $\boxed{A(x) = 2(2x+1)(-x+5)}$.

$B(x) = \left[(x-2)-(3x+1)\right]\left[(x-2)+(3x+1)\right] = (x-2-3x-1)(x-2+3x+1)$ donc $\boxed{B(x) = (-2x-3)(4x-1)}$.

$C(x) = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2$ donc $\boxed{C(x) = (x-3)^2}$.

$D(x) = (2x)^2 - 2\times 2x\times 1 + 1^2$ donc $\boxed{D(x) = (2x-1)^2}$.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left[3(x+2)\right]^2 - \left[4(x-1)\right]^2 = \left[3(x+2)-4(x-1)\right]\left[3(x+2)+4(x-1)\right] \\ &= (3x+6-4x+4)(3x+6+4x-4) \end{aligned}$$
donc $\boxed{E(x) = (-x+10)(7x+2)}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= (2x-1)\times 1 + (x+7)\times(-3)\times(2x-1) = (2x-1)\left[1-3(x+7)\right] \\ &= (2x-1)(1-3x-21) \end{aligned}$$
donc $\boxed{F(x) = (2x-1)(-3x-20)}$.

Exercice 4. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

$$A = \sqrt{48} \qquad B = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{75} \qquad C = \frac{20-6\sqrt{10}}{\sqrt{10}-3}.$$

Solution.
$A = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\sqrt{3}$ donc $\boxed{A = 4\sqrt{3}}$.

$B = \sqrt{9\times 3} - 2\sqrt{4\times 3} + 3\sqrt{25\times 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} - 2\sqrt{4}\sqrt{3} + 3\sqrt{25}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3}$ donc $\boxed{B = 14\sqrt{3}}$.

$C = \dfrac{(20-6\sqrt{10})(\sqrt{10}+3}{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)} = \dfrac{20\sqrt{10}+60-6\sqrt{10}^2-18\sqrt{10}}{\sqrt{10}^2-3^2} = \dfrac{20\sqrt{10}+60-60-18\sqrt{10}}{10-9} = \dfrac{2\sqrt{10}}{1}$ donc $\boxed{C = 2\sqrt{10}}$.

Exercice 5. Montrer que, pour tous réels a et b et tous entiers naturels n et m tels que $n \geqslant m$,

$$(a^n-b^n)(a^m+b^m) - (a^m-b^m)(a^n+b^n) = 2a^mb^m(a^{n-m}-b^{n-m}).$$

Solution. Soit a et b deux réels et n et m deux entiers tels que $n > m$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} (a^n-b^n)(a^m+b^m) - (a^m-b^m)(a^n+b^n) &= a^{n+m} + a^nb^m - b^na^m - b^{n+m} - (a^{m+n} + a^mb^n - b^ma^n - b^{m+n}) \\ &= a^{n+m} + a^nb^m - a^mb^n - b^{n+m} - a^{n+m} - a^mb^n + a^nb^m - b^{n+m} \\ &= 2a^nb^m - 2a^mb^n \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$2a^mb^m(a^{n-m}-b^{n-m}) = 2a^{m+n-m}b^m - 2a^mb^{m+n-m} = 2a^nb^m - 2a^mb^n.$$

On obtient le même résultat dans les deux cas donc, pour tous réels a et b et tout entiers n et m tels que $n > m$,

$$\boxed{(a^n-b^n)(a^m+b^m) - (a^m-b^m)(a^n+b^n) = 2a^mb^m(a^{n-m}-b^{n-m})}.$$

Exercice 6. On considère la proposition suivante :

$$P : \text{« Pour tout réel } x\text{, si } x - \sqrt{2} \text{ est rationnel alors } x \text{ est rationnel »}.$$

1. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?
2. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?
3. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

Solution.

1. La proposition est fausse. En effet, si $x = \sqrt{2}$ alors $x - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$ mais $x \notin \mathbb{Q}$.
2. La réciproque de P est : « pour tout réel x, si x est rationnel alors $x - \sqrt{2}$ est rationnel ». Cette réciproque est fausse. En effet, si $x = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$ mais $x - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (car si $-\sqrt{2}$ était rationnel, il existerait des entiers a et b tels que $-\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et alors $\sqrt{2} = \frac{-a}{b}$ serait rationnel).
3. La négation de P est « il existe un réel x tel que $x - \sqrt{2}$ est rationnel et x n'est pas rationnel ».
   Cette négation est vraie car P est fausse.

Exercice 7.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)2^n = (n+1)2^{n+1}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} = n2^n.$$

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(2n+2)2^n = 2(n+1)2^n = (n+1) \times 2 \times 2^n = (n+1)2^{1+n}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ (2n+2)2^n = (n+1)2^{n+1}}$.
2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{« } 2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} = n2^n \text{ »}.$$

   Initialisation. Pour $n = 1$, $2 \times 2^0 = 2 \times 1 = 2$ et $(0+1)2^{0+1} = 1 \times 2 = 2$ donc $P(1)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} = n2^n$ et on va montrer que $2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} + (n+2)2^n = (n+1)2^{n+1}$.
   Or,

$$\begin{aligned} 2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} + (n+2)2^n &= n2^n + (n+2)2^n \\ &= (n+n+2)2^n \\ &= (2n+2)2^n \\ &= (n+1)2^{n+1} \quad \text{(d'après la question } \mathbf{1.}\text{)} \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + \cdots + (n+1)2^{n-1} = n2^n}.$$