Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure 30 (10h30-12h)

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} \qquad B = \frac{36}{35} \times \frac{25}{12} \qquad C = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}.$$

Solution.

$A = \frac{6}{18} + \frac{5}{18}$ donc $\boxed{A = \frac{11}{18}}$.

$B = \frac{6 \times 3 \times 2}{7 \times 5} \times \frac{5 \times 5}{6 \times 2} = \frac{3 \times 5}{7}$ donc $\boxed{B = \frac{15}{7}}$.

$C = \frac{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{12}{15} - \frac{10}{15}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{6} \times \frac{15}{2} = \frac{1}{3 \times 2} \times \frac{3 \times 5}{2}$ donc $\boxed{C = \frac{5}{4}}$.

Exercice 2. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x les expressions suivantes.

$$A(x) = (x-1)(2x+3) \qquad B(x) = (4x+1)^2$$

$$C(x) = (x+2)(x-2)(x^2+4) \qquad D(x) = 6\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)(5x+2)$$

Solution.

$A(x) = 2x^2 + 3x - 2x - 3$ donc $\boxed{A(x) = 2x^3 + x - 3}$.

$B(x) = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2$ donc $\boxed{B(x) = 16x^2 + 8x + 1}$.

$C(x) = (x^2 - 2^2)(x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = (x^2)^2 - 4^2$ donc $\boxed{C(x) = x^4 - 16}$.

$D(x) = (2x+3)(5x+2) = 10x^2 + 4x + 15x + 6$ donc $\boxed{D(x) = 10x^2 + 19x + 6}$.

Exercice 3. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

$$A(x) = (x+1)(3x+7) - (x+1) \qquad B(x) = (3x-1)^2 - (x-2)^2$$

$$C(x) = x^2 - 4x + 4 \qquad D(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$E(y) = 4(x+1)^2 - 9(3x-5)^2 \qquad F(x) = (x+1)(2x-7) + (14-4x)(2x-3)$$

Solution.

$A(x) = (x+1)\left[(3x+7) - 1\right] = (x+1)(3x+6)$ donc $\boxed{A(x) = 3(x+1)(x+2)}$.

$B(x) = [(3x-1)-(x-2)]\,[(3x-1)+(x-2)] = (3x-1-x+2)(3x-1+x-2)$ donc $\boxed{B(x) = (2x+1)(4x-3)}$.

$C(x) = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2$ donc $\boxed{C(x) = (x-2)^2}$.

$D(x) = x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2$ donc $\boxed{D(x) = (x-5)^2}$.

$$\begin{aligned} E(x) &= [2(x+1)]^2 - [3(3x-5)]^2 = [2(x+1) - 3(3x-5)]\,[2(x+1)+3(3x-5)] \\ &= (2x+2-9x+15)(2x+2+9x-15) \end{aligned}$$

donc $\boxed{E(x) = (-7x+17)(11x-13)}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= (x+1)(2x-7) - 2(2x-7)(2x-3) = (2x-7)\,[(x+1)-2(2x-3)] \\ &= (2x-7)(x+1-4x+6) \end{aligned}$$

donc $\boxed{F(x) = (2x-7)(-3x+7)}$.

Exercice 4. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

$$A = \sqrt{75} \qquad B = \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{50}-7} - 7.$$

Solution.
$A = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3}$ donc $\boxed{A = 5\sqrt{3}}$.

$B = \sqrt{4\times 2} - 2\sqrt{9\times 2} + 3\sqrt{25\times 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} - 2\sqrt{9}\sqrt{2} + 3\sqrt{25}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$ donc $\boxed{B = 11\sqrt{2}}$.

$C = \dfrac{\sqrt{50}+7}{\left(\sqrt{50}-7\right)\left(\sqrt{50}+7\right)} - 7 = \dfrac{\sqrt{50}+7}{\sqrt{50}-7^2} - 7 = \dfrac{\sqrt{50}+7}{50-49} - 7 = \sqrt{50}+7-7 = \sqrt{25\times 2}$ donc $\boxed{C = 5\sqrt{2}}$.

Exercice 5. Montrer que, pour tout réel x, $4(x-1)\left(x+\dfrac{3}{4}\right) = \left(2x-\dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{49}{16}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, d'une part,

$$4(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right) = (x-1)\times 4\left(x+\frac{3}{4}\right) = (x-1)(4x+3) = 4x^2+3x-4x-3 = 4x^2-x-3$$

et, d'autre part,

$$\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = (2x)^2 - 2\times 2x\times\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 4x^2 - x + \frac{1}{16} - \frac{49}{16} = 4x^2 - x - \frac{48}{16} = 4x^2 - x - 3.$$

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ 4(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right) = \left(2x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}}$.

Exercice 6. On considère la proposition suivante :

P : « Pour tout réel x, si x est rationnel alors x^2 est rationnel ».

1. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?
2. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?

3. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?
Que peut-on en déduire concernant P ?

Solution.

1. La proposition est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x est rationnel. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Alors, $x^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc, comme $a^2 \in \mathbb{Z}$ et $b^2 \in \mathbb{N}$, x^2 est rationnel.

2. La réciproque de P est : « pour tout réel x, si x^2 est rationnel alors x est rationnel ».
Cette réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple $x = \sqrt{2}$. En effet, $\sqrt{2}^2 = 2$ est rationnel mais $x = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

3. La négation de P est « il existe un réel x tel que x es rationnel et x^2 n'est pas rationnel ».
Cette négation est fausse car P est vraie.

Exercice 7. Démontrer par récurrence les propositions suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 5$, $2^n \geqslant 5(n+1)$.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$P(n) \ : \ « \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} ».$$

Initialisation. Pour $n = 1$, $\dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ et on va montrer que $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}}.$$

2. Considérons, pour tout entier $n \geqslant 5$, la proposition $P(n)$: « $2^n \geqslant 5(n+1)$ ».

Initialisation. Pour $n = 5$, $2^n = 2^5 = 32$ et $5(n+1) = 5 \times 6 = 30$ donc $2^5 \geqslant 5(5+1)$. Ainsi, $P(5)$ est vraie.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 5$. On suppose que $P(n)$ est vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $2^n \geqslant 5(n+1)$ et on va montrer que $2^{n+1} \geqslant 5(n+2)$.

Comme $2^n \geqslant 5(n+1)$ et comme $2 > 0$, $2 \times 2^n \geqslant 2 \times 5(n+1)$ donc $2^{n+1} \geqslant 5(n+1)+5(n+1)$. De plus, $n \geqslant 5$ donc $n+1 \geqslant 6$ et ainsi $5(n+1) \geqslant 30$. Dès lors,

$$2^{n+1} \geqslant 5(n+1) + 30 \geqslant 5(n+1) + 5 = 5(n+1+1) = 5(n+2)$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 5,\ 2^n \geqslant 5(n+1).}.$$