Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{18}{35} \times \frac{28}{45} \qquad B = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \qquad C = \frac{\frac{1}{64} - \frac{1}{8}}{7} \qquad D = \frac{1 + \frac{1}{63}}{1 + \frac{1}{7}}.$$

Solution.

$A = \frac{2 \times 9}{5 \times 7} \times \frac{4 \times 7}{5 \times 9} = \frac{2 \times 4}{5 \times 5}$ donc $\boxed{A = \frac{8}{25}}$.

$B = \frac{\frac{8}{20} - \frac{5}{20}}{\frac{2}{6} - \frac{3}{6}} = \frac{\frac{3}{20}}{-\frac{1}{6}} = \frac{3}{20} \times (-6)$ donc $\boxed{B = -\frac{9}{10}}$.

$C = \frac{\frac{1}{64} - \frac{8}{64}}{7} = -\frac{7}{64} \times \frac{1}{7}$ donc $\boxed{C = -\frac{1}{64}}$.

$D = \frac{\frac{63}{63} + \frac{1}{63}}{\frac{7}{7} + \frac{1}{7}} = \frac{\frac{64}{63}}{\frac{8}{7}} = \frac{64}{63} \times \frac{7}{8} = \frac{8 \times 8}{9 \times 7} \times \frac{7}{8}$ donc $\boxed{D = \frac{8}{9}}$.

Exercice 2. Factoriser au maximum les expression suivantes.

$A(x) = (x+1)(x+3) - (x+1)(5-x)$ $\qquad B(x) = (x+1)^2 - (3x+2)^2$

$C(x) = x^2 - 6x + 9$ $\qquad D(x) = x^2 + 4x + 4$

$E(y) = 3(y+1)^2 - 12(y+2)^2$ $\qquad F(x) = (x-3)(x+5)^5 - (x-3)^3(x+5)^3$

Solution.

$A(x) = (x+1)\left[(x+3) - (5-x)\right] = (x+1)(x+3-5+x) = (x+1)(2x-2)$ donc $\boxed{A(x) = 2(x+1)(x-1)}$

$B(x) = \left[(x+1) - (3x+2)\right]\left[(x+1) + (3x+2)\right] = (x+1-3x-2)(x+1+3x+2)$ donc $\boxed{B(x) = (-2x-1)(4x+3)}$.

$C(x) = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$ donc $\boxed{C(x) = (x-3)^2}$.

$D(x) = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2$ donc $\boxed{D(x) = (x+2)^2}$.

$$\begin{aligned} E(y) &= 3\left[(y+1)^2 - 4(y+2)^2\right] = 3\left[(y+1)^2 - (2(y+2))^2\right] \\ &= 3\left[(y+1) - 2(y+2)\right]\left[(y+1) + 2(y+2)\right] \\ &= 3(y+1-2y-4)(y+1+2y+4) = 3(-y-3)(3y+3) \text{ donc } \boxed{E(y) = 3(-y-3)(3y+5)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-3)(x+5)^3(x+5)^2 - (x-3)^2(x-3)(x+5)^3 \\ &= (x-3)(x+5)^3\left[(x+5)^2 - (x-3)^2\right] \\ &= (x-3)(x+5)^3\left[(x+5) - (x-3)\right]\left[(x+5) + (x-3)\right] \\ &= (x-3)(x+5)^3(x+5-x+3)(x+5+x-3) = (x-3)(x+5)^3(8)(2x+2) \text{ donc} \end{aligned}$$

$\boxed{F(x) = 16(x-3)(x+5)^3(x+1)}$.

Exercice 3. Simplifier les fractions suivantes.

$$f(t) = \frac{t-1}{2t} \times \left(\frac{t+1}{t-1} - 1\right) \qquad g(x) = \frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}} \qquad h(x,y) = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Solution.

$f(t) = \frac{t-1}{2t} \times \left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t-1}{t-1}\right) = \frac{t-1}{2t} \times \frac{t+1-(t-1)}{t-1} = \frac{t-1}{2t} \times \frac{2}{t-1}$ donc $\boxed{f(t) = \frac{1}{t}}$.

$g(x)=\dfrac{\frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)}}{\frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)}}=\dfrac{2x+1-(2x-1)}{2x+1+2x-1}=\dfrac{2}{4x}$ donc $\boxed{g(x)=\dfrac{1}{2x}}$.

$h(x,y)=\dfrac{\frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}}{\frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ donc $\boxed{h(x,y)=1}$.

Exercice 4. Simplifier au maximum les écritures suivantes.

$$A=\sqrt{27}\qquad B=\sqrt{5^2-3^2}\qquad C=\sqrt{75}-2\sqrt{12}+3\sqrt{3}\qquad D=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Solution.
$A=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}$ donc $\boxed{A=3\sqrt{3}}$.
$B=\sqrt{25-8}=\sqrt{16}$ donc $\boxed{B=4}$.
$C=\sqrt{25\times 3}-2\sqrt{4\times 3}+3\sqrt{3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}-2\sqrt{4}\times\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ donc $\boxed{C=4\sqrt{3}}$.
$D=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}$ donc $\boxed{D=\sqrt{2}+1}$.

Exercice 5. Montrer que, pour tout réel x, $(x^2-1)(x^2-9)=(x^2-4x+3)(x^2+4x+3)$.

Solution. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors, d'une part,

$$(x^2-1)(x^2-9)=x^4-9x^2-x^2+9=x^4-10x^2+9$$

et, d'autre part,

$$(x^2-4x+3)(x^2+4x+3)=x^4+4x^3+3x^2-4x^3-16x^2-12x+3x^2+12x+9=x^4-10x^2+9$$

donc $(x^2-1)(x^2-9)=(x^2-4x+3)(x^2+4x+3)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ (x^2-1)(x^2-9)=(x^2-4x+3)(x^2+4x+3)}$.

Exercice 6. On considère la proposition suivante :

P : « Pour tout réel x, si $x^2+x=2$ alors $x=-2$ ».

1. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?

2. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?

3. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

Solution.

1. La proposition P est fausse car $1^2+1=2$ mais $1\neq -2$.

2. La réciproque de$P$ est « Pour tout réel x, si $x=-2$ alors $x^2+x=2$ ». Cette réciproque est vraie. En effet, soit $x\in\mathbb{R}$. Supposons que $x=-2$. Alors, $x^2+x=(-2)^2+(-2)=4-2=2$ donc $x^2+x=2$.

3. La négation de P est « il existe un réel x tel que $x^2+x=2$ et $x\neq -2$ ». Comme P est fausse, non(P) est vraie.

Exercice 7. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ est irrationnel.

Solution. Supposons par l'absurde que $\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{3\sqrt{2}-4}=\frac{a}{b}$. Dès lors, $3\sqrt{2}-4=\frac{a^2}{b^2}$ donc $3\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}+4=\frac{a^2+4b^2}{b^2}$ et donc $\sqrt{2}=\frac{a^2-4b^2}{3b^2}$. Or, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et, comme a et b sont entiers, $\frac{a^2-4b^2}{3b^2}\in\mathbb{Q}$.

On aboutit à une contradiction donc $\boxed{\sqrt{3\sqrt{2}-4}\text{ est irrationnel}}$.

Exercice 8.

1. **a.** Soit n un entier naturel. Justifier que $2^{n+1}+2^{n+1}=2^{n+2}$.

   b. En déduire par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$$

2. Soit q un réel différent de 1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Solution.

1. **a.** $2^{n+1}+2^{n+1}=2\times 2^{n+1}=2^{1+n+1}$ donc $\boxed{2^{n+1}+2^{n+1}=2^{n+2}}$.

   b. On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ ».

   - Initialisation. $2^0=1$ et $2^{0+1}-1=2^1-1=2-1=1$ donc $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$. Alors,

$$2^0+2^1+2^2\cdots+2^n+2^{n+1}=(2^{n+1}-1)+2^{n+1}=2^{n+1}+2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$$

   donc $P(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

   - Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1}.$$

2. On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $H(n)$: « $q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

   - Initialisation. $q^0=1$ et $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}=\dfrac{1-q}{1-q}=1$ donc $H(0)$ est vraie.
   - Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $H(n)$ est vraie c'est-à-dire que $q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Alors,

$$\begin{aligned}q^0+q^1+q^2\cdots+q^n+q^{n+1}&=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q}\\&=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}\\&=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

   donc $H(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $H(n)$ implique $H(n+1)$.

   - Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ q^0+q^1+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}.$$