TB1 **lundi 25 septembre 2023**

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures (10h-12h)

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdit.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{18}{35} \times \frac{28}{45} \qquad B = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \qquad C = \frac{\frac{1}{64} - \frac{1}{8}}{7} \qquad D = \frac{1 + \frac{1}{63}}{1 + \frac{1}{7}}.$$

Exercice 2. Factoriser au maximum les expression suivantes.

$$A(x) = (x+1)(x+3) - (x+1)(5-x) \qquad B(x) = (x+1)^2 - (3x+2)^2$$
$$C(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad D(x) = x^2 + 4x + 4$$
$$E(y) = 3(y+1)^2 - 12(y+2)^2 \qquad F(x) = (x-3)(x+5)^5 - (x-3)^3(x+5)^3$$

Exercice 3. Simplifier les fractions suivantes.

$$f(t) = \frac{t-1}{2t} \times \left(\frac{t+1}{t-1} - 1\right) \qquad g(x) = \frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}} \qquad h(x,y) = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Exercice 4. Simplifier au maximum les écritures suivantes.

$$A = \sqrt{27} \qquad B = \sqrt{5^2 - 3^2} \qquad C = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Exercice 5. Montrer que, pour tout réel x, $(x^2-1)(x^2-9) = (x^2-4x+3)(x^2+4x+3)$.

Exercice 6. On considère la proposition suivante :

P : « Pour tout réel x, si $x^2 + x = 2$ alors $x = -2$ ».

1. La proposition P est-elle vraie ou fausse ?

2. Écrire la réciproque de P. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?

3. Écrire la négation de P. Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 7. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\sqrt{3\sqrt{2} - 4}$ est irrationnel.

Exercice 8.

1. a. Soit n un entier naturel. Justifier que $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$.

b. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

2. Soit q un réel différent de 1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$