

Devoir à la maison n°9

À rendre le mercredi 25 mars 2026

Dans toute la suite, m désigne un réel.

1. On considère le polynôme $P = X^2 + mX + 1$.
 - a. Calculer le discriminant de P en fonction de m . On donnera le résultat sous forme factorisée.
 - b. En discutant selon les valeurs de m , déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(x) = 0$.
2. On considère le polynôme Q défini par

$$Q = X^3 - 3mX^2 + (6m^2 - 2)X - 6m^2 + 3m + 1.$$

- a. Montrer que 1 est une racine de Q . (On ne cherchera pas à déterminer s'il s'agit d'une racine simple ou multiple.)
 - b. Factoriser Q en un produit d'un polynôme de degré 1 et un polynôme de degré 2.
3. On considère l'équation différentielle

$$(E_m) : y'' + my' + y = x^3 + 4x + 6m^3 - 6m^2 - 5m + 1.$$

- a. Déterminer, selon les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E_m) . On pourra utiliser les résultats de la question **1.b.**
- b. Montrer que la fonction Q est une solution particulière de (E_m) .
- c. En déduire, selon les valeurs de m , l'ensemble des solutions de (E_m) .
- d. Déterminer la solution f de (E_2) telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Solution.

1. a. Le discriminant de P est $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 1 = m^2 - 4$ soit $\Delta = (m - 2)(m + 2)$.

b. Le trinôme $(X - 2)(X + 2) = X^2 - 4$ s'annule en 2 et en -2 et son coefficient dominant est positif donc ce trinôme est strictement positif sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, strictement négatif sur $]-2; 2[$ et nul en 2 et en -2 . Ainsi, on en déduit que :

- si $m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ alors l'équation $P(x) = 0$ possède dans \mathbb{C} deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4}}{2 \times 1} = -\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2 \times 1} = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

- si $m \in \{-2, 2\}$ alors l'équation $P(x) = 0$ possède dans \mathbb{C} une unique solution réelle :

$$r_0 = \frac{-m}{2 \times 1} = -\frac{m}{2}$$

- si $m \in]-2; 2[$ alors l'équation $P(x) = 0$ possède dans \mathbb{C} deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-m - i\sqrt{4 - m^2}}{2 \times 1} = -\frac{m + i\sqrt{4 - m^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-m + i\sqrt{4 - m^2}}{2 \times 1} = \frac{-m + i\sqrt{4 - m^2}}{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $P(x) = 0$ dans \mathbb{C} est

$$\begin{cases} \left\{ -\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \right\} & \text{si } m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\\ \left\{ -\frac{m}{2} \right\} & \text{si } m \in \{-2, 2\} \\ \left\{ -\frac{m + i\sqrt{4 - m^2}}{2}, \frac{-m + i\sqrt{4 - m^2}}{2} \right\} & \text{si } m \in]-2; 2[\end{cases}$$

2. a. On constate que

$$Q(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + (6m^2 - 2) \times 1 - 6m^2 + 3m + 1 = 1 - 3 + 6m^2 - 2 - 6m^2 + 3m + 1 = 0$$

donc 1 est une racine de Q .

b. On en déduit qu'il existe un polynôme g de degré 2 tel que $Q = (X - 1)g$. Autrement dit, il existe des réels a , b et c avec $a \neq 0$ tels que $Q = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$$

donc

$$\begin{aligned} Q = (X - 1)(aX^2 + bX + c) &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3m \\ c - b = 6m^2 - 2 \\ -c = -6m^2 + 3m + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 3m \\ c = 6m^2 - 3m - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$Q = (X - 1)(X^2 + (1 - 3m)X + 6m^2 - 3m - 1).$$

- 3. a.** L'équation homogène associée à (E_m) est $(H_m) : y'' + my' + y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 + mx + 1 = 0$ i.e. $P(x) = 0$. Ainsi, on déduit de la question **1.a.** que l'ensemble des solutions des (H_m) est

$$\left\{ x \mapsto Ae^{-\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}x} + Be^{-\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

$$\left\{ x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{m}{2}x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in \{-2, 2\}$$

$$\left\{ x \mapsto e^{-\frac{m}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}x\right) \right) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in]-2; 2[$$

- b.** Pour tout réel x , $Q'(x) = 3x^2 - 6mx + (6m^2 - 2)$ et $Q''(x) = 6x - 6m$ donc

$$\begin{aligned} Q''(x) + mQ'(x) + Q(x) &= 6x - 6m + m(3x^2 - 6mx + (6m^2 - 2)) + x^3 - 3mx^2 \\ &\quad + (6m^2 - 2)x - 6m^2 + 3m + 1 \\ &= 6x - 6m + 3mx^2 - 6m^2x + 6m^3 - 2m + x^3 - 3mx^2 \\ &\quad + 6m^2x - 2x - 6m^2 + 3m + 1 \\ &= x^3 + 4x + 6m^3 - 6m^2 - 5m + 1 \end{aligned}$$

donc Q est une solution particulière de (E_m) .

- c.** On en déduit que l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de (E_m) est

$$\left\{ x \mapsto Q(x) + Ae^{-\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}x} + Be^{-\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

$$\left\{ x \mapsto Q(x) + (Ax + B)e^{-\frac{m}{2}x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in \{-2, 2\}$$

$$\left\{ x \mapsto Q(x) + e^{-\frac{m}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}x\right) \right) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \text{ si } m \in]-2; 2[$$

- d.** Une solution de (E_2) est de la forme $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 22x - 17 + (Ax + B)e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 22 + Ae^{-x} + (Ax + B)(-e^{-x}) = 3x^2 - 12x + 22(-Ax + (A - B))e^{-x}$$

donc

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -17 + B = 0 \\ 22 + A - B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 17 \\ A = -5 \end{cases}.$$

Ainsi, la solution f de (E_2) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est

$$f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 22x - 17 + (-5x + 17)e^{-x}.$$