Devoir à la maison n°9

À rendre le mercredi 23 avril 2025

Exercice 1.

1. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = \cos(t)$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$.
   b. Déterminer l'unique solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$.
2. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 5t^2$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.
   b. Déterminer l'unique solution g de (E_2) telle que $g(0) = g'(0) = 0$.

Solution.

1. **a.** L'équation homogène associée à (E_1) est $(H_1) : y' - 2y = 0$. L'ensemble des solution de (H_1) est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{2t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

   Soit a et b deux réels et $h : t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t)$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel t, $h'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$ donc

   $$h'(t) - 2h(t) = (-a\sin(t) + b\cos(t)) - 2(a\cos(t) + b\sin(t) = (b - 2a)\cos(t) - (a + 2b)\sin(t).$$

   Ainsi, pour que h soit solution de $(E_1$, il suffit que

   $$\begin{cases} b - 2a = 1 \\ a + 2b = 0. \end{cases}$$

   Or,

   $$\begin{cases} b - 2a = 1 \\ a + 2b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} b - 2(-2b) = 1 \\ a = -2b \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ a = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

   Ainsi, $h : t \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ est une solution de (E_1).

   Par théorème, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

   $$\boxed{\left\{ t \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) + C\mathrm{e}^{2t} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}.$$

   b. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) + C\mathrm{e}^{2t}$. Alors,

   $$f(0) = 0 \iff -\frac{2}{5} + C = 0 \iff C = \frac{2}{5}.$$

   Ainsi, l'unique solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ est

   $$\boxed{f : t \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2t}}.$$

2. a. L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $(C_2) : x^2 - 2x + 5 = 0$.

Le discriminant de $X^2 - 2X + 5$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -14 < 0$ donc (C_2) possède deux solutions complexes conjuguées : $x_1 = \dfrac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 - 2\mathrm{i}$ et $x_2 = \overline{x_1} = 1 + 2\mathrm{i}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H_2) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \mathrm{e}^t \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $h : t \longmapsto at^2 + bt + c$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $h'(t) = 2at + b$ et $h''(t) = 2a$ donc

$$\begin{aligned} h''(t) - 2h'(t) + 5h(t) &= 2a - 2(2at + b) + 5(at^2 + bt + c) \\ &= 2a - 4at - 2b + 5at^2 + 5bt + 5c \\ &= (5a)t^2 + (-4a + 5b)t + (2a - 2b + 5c). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que h soit solution de (H_2), il suffit que $5a = 5$, $-4a + 5b = 0$ et $2a - 2b + 5c = 0$ i.e. $a = 1$, $b = \frac{4}{5}$ et $c = -\frac{2}{25}$ donc $h : t \longmapsto t^2 + \frac{4}{5}t - \frac{2}{25}$ est une solution de (E_2).

On conclut alors que l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto t^2 + \frac{4}{5}t - \frac{2}{25} + \mathrm{e}^t \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

b. Soit A et B deux réels et $g : t \longmapsto t \longmapsto t^2 + \frac{4}{5}t - \frac{2}{25} + \mathrm{e}^t \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right)$. Alors, pour tout réel t,

$$g'(t) = 2t + \frac{4}{5} + \mathrm{e}^t \left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) + \mathrm{e}^t \left(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)\right)$$

donc $g(0) = -\frac{2}{25} + A$ et $g'(0) = \frac{4}{5} + A + 2B$. Ainsi,

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A - \frac{2}{25} = 0 \\ \frac{4}{5} + A + 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{25} \\ B = -\frac{11}{25} \end{cases}.$$

Ainsi, l'unique solution g de (E_2) telle que $g(0) = g'(0) = 0$ est

$$\boxed{g : t \longmapsto t^2 + \frac{4}{5}t - \frac{2}{25} + \mathrm{e}^t \left(\frac{2}{25}\cos(2t) - \frac{11}{25}\sin(2t)\right)}.$$

Exercice 2. On considère une urne contenant initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne accompagnée de deux boules de la même couleur. Ainsi, si au premier tirage on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne avec deux autres boules rouges, de sorte qu'au moment du deuxième tirage, l'urne contient quatre boules : trois rouges et une noire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « Tirer une boule rouge au n-ième tirage ».

1. **a.** Déterminer les probabilités des événements R_1 et $\overline{R_1}$.
   b. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité de R_2.
   c. Si on a tiré une boule rouge au second tirage, quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire au premier tirage ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : « les n premières boules tirées sont rouges ».
   a. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la probabilité de A_n sachant A_{n-1}.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_n à l'aide des évènements R_1, R_2, ..., R_n.
   c. Déterminer la probabilité que les 4 premières boules tirées soient rouges.
   d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n est égale à $\dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Solution.

1. **a.** Initialement, l'urne contient une boule de chaque couleur donc, par équiprobabilité des tirages, $\boxed{\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}(\overline{R_1}) = \frac{1}{2}.}$
   b. Comme $(R_1, \overline{R_1})$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,
$$\mathbf{P}(R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$
   donc $\boxed{\mathbf{P}(R_2) = \dfrac{1}{2}}$.
   c. Par la formule de Bayes,
$$\mathbf{P}(\overline{R_1} \mid R_2) = \frac{\mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1})}{\mathbf{P}(R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$
   i.e. $\boxed{\mathbf{P}(\overline{R_1} \mid R_2) = \frac{1}{4}}$.
2. **a.** Soit un entier $n \geqslant 2$. Si A_{n-1} est réalisé, les $n-1$ premiers tirages n'ont donné que des boules rouges de sorte que l'urne contient $2 + 2(n-1) = 2n$ boules dont $1 + 2(n-1)$ sont rouges. Par équiprobabilité, $\boxed{\mathbf{P}(A_n \mid A_{n-1}) = \dfrac{2n-1}{2n}}$.
   b. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{A_n = \bigcap_{i=1}^{n} R_i}$.
   c. Ainsi, $A_4 = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$ donc, d'après la formule des probabilités composées,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_4) &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)\mathbf{P}(R_3 \mid R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(R_4 \mid R_1 \cap R_2 \cap R_3)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}\end{aligned}$$
   i.e. $\boxed{\mathbf{P}(A_4) = \dfrac{35}{128}}$.

d. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)\cdots\mathbf{P}\left(R_n \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{n-1} R_i\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \\
&= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)^2} \\
&= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2n}{((2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots (2 \times n))^2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}}$.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1.

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ définie sur $[0\,;1]$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

3. a. En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution.

1. $u_1 = \dfrac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;1]$. On aboutit donc au tableau suivant.

x	0		1
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a bien $0 < u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ donc, comme la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, $f(0) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ i.e. $0 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$, on a également $0 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

b. On déduit de la question précédente que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + u_n^2 = 1 + \ell^2$. Or, comme $1 + \ell^2 \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 1+\ell^2} \sqrt{x} = \sqrt{1+\ell^2}$ et enfin, comme $\sqrt{1+\ell^2} \neq 0$, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$. Ainsi, $\ell\sqrt{1+\ell^2} = \ell$ donc $\ell(\sqrt{1+\ell^2} - 1) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\sqrt{1+\ell^2} = 1$. Or, si $\sqrt{1+\ell^2} = 1$ alors, en élevant au carré, $1 + \ell^2 = 1$ donc $\ell^2 = 0$ et ainsi $\ell = 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\ell = 0}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}\right)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1+u_n^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2}$$
$$= \frac{1+u_n^2-1}{u_n^2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 1}$. Son premier terme est $v_0 = \dfrac{1}{u_0^2} = \dfrac{1}{1^2}$ soit $\boxed{v_0 = 1}$.

b. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 1 = n+1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$ donc $u_n^2 = \dfrac{1}{v_n}$ et, comme u_n est positif d'après la question **4.a.**, $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{v_n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}$.

c. Par propriété, $n+1 \sim n$ donc $(n+1)^{-\frac{1}{2}} \sim n^{-\frac{1}{2}}$ i.e. $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.