Devoir à la maison n°9

À rendre le mercredi 23 avril 2025

Exercice 1.

1. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = \cos(t)$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$.
   b. Déterminer l'unique solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$.
2. **a.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_2) : $y'' - 2y' + 5y = 5t^2$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.
   b. Déterminer l'unique solution g de (E_2) telle que $g(0) = g'(0) = 0$.

Exercice 2. On considère une urne contenant initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante : après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne accompagnée de deux boules de la même couleur. Ainsi, si au premier tirage on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne avec deux autres boules rouges, de sorte qu'au moment du deuxième tirage, l'urne contient quatre boules : trois rouges et une noire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « Tirer une boule rouge au n-ième tirage ».

1. **a.** Déterminer les probabilités des événements R_1 et $\overline{R_1}$.
   b. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité de R_2.
   c. Si on a tiré une boule rouge au second tirage, quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire au premier tirage ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : « les n premières boules tirées sont rouges ».
   a. Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, la probabilité de A_n sachant A_{n-1}.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_n à l'aide des évènements R_1, R_2, ..., R_n.
   c. Déterminer la probabilité que les 4 premières boules tirées soient rouges.
   d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de A_n est égale à $\dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1.

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ définie sur $[0\,;1]$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

3. **a.** En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.