Devoir à la maison n°9

À rendre le mercredi 15 mai 2024

Exercice 1. On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B et C et on fait les constatations suivantes :

- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat sur le site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $\frac{1}{12}$, le site B avec une probabilité $\frac{7}{12}$ et le site C avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites de façon équiprobable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site A », B_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site B » et C_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site C ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

1. Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?
2. En utilisant la formule de probabilités totales, calculer p_2, q_2 et r_2.
3. Sachant que le client effectue son deuxième achat sur le site A, quel est le plus probable : qu'il ait effectué son premier achat sur le site A, sur le site B ou sur le site C ?

Solution.

1. Comme le premier site est choisi de façon équiprobable, $\boxed{p_1 = q_1 = r_1 = \frac{1}{3}}$.
2. Comme les évènements A_1, B_1 et C_1 forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 = \mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(A_2 \mid C_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{12} \end{aligned}$$

soit $\boxed{p_2 = \frac{5}{36}}$.

De même,

$$\begin{aligned} q_2 = \mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(B_2 \mid C_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \end{aligned}$$

soit $\boxed{q_2 = \frac{23}{36}}$ et

$$\begin{aligned} r_2 = \mathbf{P}(C_2) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(C_2 \mid A_1) + \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(C_2 \mid B_1) + \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2 \mid C_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

soit $\boxed{r_2 = \frac{2}{9}}$.

3. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(A_1 \mid A_2) = \frac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{4}{5}$$

$$\mathbf{P}(B_1 \mid A_2) = \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_2 \mid B_1)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\times 0}{\frac{5}{36}} = 0$$

et

$$\mathbf{P}(C_1 \mid A_2) = \frac{\mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(A_2 \mid C_1)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi, si le client effectue son deuxième achat sur le site A, le plus probable est qu'il ait effectué son premier achat également sur le site A.

Exercice 2.

1. On considère la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

b. En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $g(0)$ et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n^2)$.

a. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

b. Calculer la valeur exacte de u_1.

c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

d. Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

e. Justifier que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. (On pourra utiliser les résultats de la question **1.**).

Solution.

1. a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{x^2-2x+1}{1+x^2}$$

donc $\boxed{g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}}$.

b. Pour tout réel x, $g'(x) \geqslant 0$ et, de plus, $g'(x)$ ne s'annule que pour $x = 1$. Ainsi, g' est positive et ne s'annule qu'un nombre fini de fois donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

c. $g(0) = 0 - \ln(1+0^2) = -\ln(1) = 0$. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, g est injective sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet au plus une solution. On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } g(x) = 0 \text{ est } \{0\}}$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 0$ donc $1 + u_n^2 > 0$ et donc $\ln(1+u_n^2)$ est bien défini. Ainsi, on conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$.

b. $u_1 = \ln(1+u_0^2) = \ln(1+1^2)$ donc $\boxed{u_1 = \ln(2)}$.

c. Procédons par disjonction de cas :
1$^{\text{er}}$ cas Si $n = 0$ alors $u_n = 1 \geqslant 0$.
2$^{\text{ème}}$ cas Si $n > 0$ alors $u_n = \ln(1 + u_{n-1}^2)$ et, comme $1 + u_{n-1}^2 \geqslant 1$, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(1 + u_{n_1}^2) \geqslant 0$ i.e. $u_n \geqslant 0$.
On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

d. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ˇ.
Initialisation. Comme $\ln(2) \approx 0{,}69$, $u_1 \leqslant u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc, comme ces deux nombres sont positifs d'après la question **3.**, $u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2$ par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$. Par suite, $1 + u_{n+1}^2 \leqslant 1 + u_n^2$ et, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(1 + u_{n+1}^2) \leqslant \ln(1 + u_n^2)$ i.e. $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

e. La suite (u_n) est décroissance et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$.
De plus, d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + u_n^2 = 1 + \ell^2$. Or, comme $1 + \ell^2 > 0$, $\mathrm{Im}_{x\to 1+\ell^2} \ln(x) = \ln(1 + \ell^2)$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1 + u_n^2) = \ln(1 + \ell^2)$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ln(1 + \ell^2)$.
Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \ln(1 + \ell^2)$. Dès lors, $\ell - \ln(1 + \ell^2) = 0$ i.e. $g(\ell) = 0$ donc, d'après le résultat de la question **1.c.**, $\ell = 0$.
Ainsi, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 3. Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules blanches. On effectue k tirages avec remise d'une boule dans l'urne où $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère les évènements A_k : « On obtient au moins une boule de chaque couleur » et B_k : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. Démontrer que $\mathbf{P}(A_k) = 1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}$ et que $\mathbf{P}(B_k) = \dfrac{k+1}{2^k}$.

2. Démontrer que A_k et B_k sont indépendants si et seulement si $\dfrac{k+1}{2^{k-1}} = 1$.

3. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

a. Calculer les 4 premiers termes de (u_n). On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Démontrer que (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de k, que l'on déterminera, telle que A_k et B_k soient indépendants.

Solution.

1. On modélise la situation par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 2^k tirages possibles.
La probabilité de C_k : « n'obtenir que des boules blanches » est alors $\frac{1}{2^k}$ et celle de D_k : « n'obtenir que des boules noires » est également $\frac{1}{2^k}$ car il n'y a qu'un seul tirage qui réalise chacun des ces évènements. Or, $A_k = C_k \cup D_k$ et cette union est disjointe donc $\mathbf{P}(A_k) = 2 \times \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$. Dès lors, $\boxed{\mathbf{P}(A_k) = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}}$.

En notant E_k : « obtenir exactement une boule blanche », on peut écrire $B_k = D_k \cup E_k$ et cette union est disjointe donc $\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(D_k) + \mathbf{P}(E_k)$. On a déjà vu que $\mathbf{P}(D_k) = \dfrac{1}{2^k}$.
De plus, il y a $\dbinom{k}{1} = k$ tirages qui contiennent exactement une boule blanche donc $\mathbf{P}(E_k) = \frac{k}{2^k}$. Ainsi, $P(B_k) = \frac{1}{2^k} + \frac{k}{2^k}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(B_k) = \frac{k+1}{2^k}}$.

2. L'évènement $A_k \cap B_k$ est l'évènement E_k donc $\mathbf{P}(A_k \cap B_k) = \frac{k}{2^k}$.
Ainsi, A_k et B_k sont indépendants si et seulement si $\frac{k}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\frac{k+1}{2^k}$. Or,

$$\frac{k}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\frac{k+1}{2^k} \iff k = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)(k+1) \iff k = k+1-\frac{k+1}{2^{k-1}} \iff \frac{k+1}{2^{k-1}} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{A_k \text{ et } B_k \text{ sont indépendants si et seulement si } \dfrac{k+1}{2^{k-1}} = 1}$.

3. a. Par définition, $u_1 = \dfrac{2}{2^0} = 2$, $u_2 = \dfrac{3}{2^1} = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{4}{2^2} = 1$ et $u_4 = \dfrac{5}{2^3} = \dfrac{5}{8}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 > 0$ et $2^{n-1} > 0$ donc $u_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{2n+2-n}{2n+2} = 1 - \frac{n}{2n+2} < 1$$

donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. Comme $u_4 = \dfrac{5}{8}$ et (u_n) est décroissante, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n < 1$. De plus, $u_1 > 1$, $u_2 > 1$ et $u_3 = 1$ donc on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$ si et seulement si $n = 3$.
Finalement, grâce à la question **2.**, on conclut que l'unique entier k tel que A_k et B_k soient indépendants est $\boxed{k = 3}$.