Devoir à la maison n°9

À rendre le mercredi 15 mai 2024

Exercice 1. On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B et C et on fait les constatations suivantes :

- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat sur le site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $\frac{1}{12}$, le site B avec une probabilité $\frac{7}{12}$ et le site C avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites de façon équiprobable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site A », B_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site B » et C_n : « le client effectue son n-ième achat sur le site C ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

1. Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?

2. En utilisant la formule de probabilités totales, calculer p_2, q_2 et r_2.

3. Sachant que le client effectue son deuxième achat sur le site A, quel est le plus probable : qu'il ait effectué son premier achat sur le site A, sur le site B ou sur le site C ?

Exercice 2.

1. On considère la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

b. En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $g(0)$ et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

a. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

b. Calculer la valeur exacte de u_1.

c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

d. Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

e. Justifier que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. (On pourra utiliser les résultats de la question **1.**).

T.S.V.P.

Exercice 3. Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules blanches. On effectue k tirages avec remise d'une boule dans l'urne où $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère les évènements A_k : « On obtient au moins une boule de chaque couleur » et B_k : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. Démontrer que $\mathbf{P}(A_k) = 1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}$ et que $\mathbf{P}(B_k) = \dfrac{k+1}{2^k}$.

2. Démontrer que A_k et B_k sont indépendants si et seulement si $\dfrac{k+1}{2^{k-1}} = 1$.

3. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

  a. Calculer les 4 premiers termes de (u_n). On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

  b. Démontrer que (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de k, que l'on déterminera, telle que A_k et B_k soient indépendants.