Corrigé du devoir à la maison n°8

Exercice 1. Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes P vérifiant l'équation :

$$(E)\ :\ P'^2 = P''^2 P$$

où P' est le polynôme dérivé de P et P'' est le polynôme dérivé de P'.

1. Montrer que les polynômes constants sont solutions de (E).

2. Existe-t-il des polynômes de degré 1 solutions de (E) ?

3. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$ solution de (E).

a. Démontrer que $n = 2$.
Ainsi, P est un polynôme du second degré donc il existe des réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.

b. Montrer que a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} 4a^2 = 4a^3 \\ 4ab = 4a^2 b \\ b^2 = 4a^2 c \end{cases}.$$

c. En déduire la forme du polynôme P.

4. Réciproquement, montrer que tous les polynômes de la forme précédente sont solutions de (E).

5. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Solution.

1. Soit P une polynôme constant. Alors, $P' = 0$ et $P" = 0$ donc $P'^2 = 0$ et $P"^2 P = 0P = 0$ et ainsi $P'^2 = P''^2 P$. Dès lors, $\boxed{\text{les polynômes constants sont solutions de } (E)}$.

2. Soit P un polynôme de degré 1. Alors, il existe deux réels a et b tels que $P = aX + b$ et $a \neq 0$. Dès lors, $P' = a$ et $P'' = 0$ donc $P'^2 = a \neq 0$ et $P''^2 P = 0P = 0$ et ainsi $P'^2 \neq P''^2 P$. On conclut qu'$\boxed{\text{un polynôme de degré 1 n'est pas solution de } (E)}$.

3. a. Comme P est solution de (E), $P'^2 = P''^2 P$ donc $\deg(P'^2) = \deg(P''^2 P)$. Or, par théorème, $\deg(P'^2) = 2\deg(P') = 2(n-1) = 2n-2$ et $\deg(P''^2 P) = 2\deg(P'') + \deg(P) = 2(n-2) + n = 3n-4$. Ainsi, $2n-2 = 3n-4$ donc $\boxed{n = 2}$.

b. D'autre part, $P'^2 = (2aX+b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$ et $P''^2 P = (2a)^2(aX^2 + bX + c) = 4a^3X^2 + 4a^2bX + 4a^2c$. Comme P est solution de (E), $P'^2 = P''^2 P$ donc $4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4a^3X^2 + 4a^2bX + 4a^2c$. Par unicité de coefficients, on en déduit que

$$\boxed{\begin{cases} 4a^2 = 4a^3 \\ 4ab = 4a^2 b \\ b^2 = 4a^2 c \end{cases}}.$$

c. Comme $4a^2 = 4a^3$, $4a^2 - 4a^3 = 0$ donc $4a^2(1-a) = 0$. Or, $a \neq 0$ donc $1 - a = 0$ i.e. $a = 1$.
Par suite, $4b = 4b$ et $b^2 = 4c$ donc $\boxed{P \text{ est de la forme } P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \text{ où } b \in \mathbb{R}}$.

4. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}$. Alors, $P' = 2X + b$ et $P'' = 2$ donc $P'^2 = (2X+b)^2 = 4X^2 + 4bX + b^2$ et $P''^2 P = 2^2 \left(X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}\right) = 4X^2 + 4x + b^2$ donc $P'^2 = P''^2 P$. Ainsi, $\boxed{P \text{ est solution de } (E)}$.

5. On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathbb{R}_0[X] \cup \left\{ X^2 + bX + \dfrac{X^2}{2} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}}$.

Exercice 2. On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) + f(-x) = x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' - y = x$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

2. On suppose que f est une solution du problème étudié et on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$.

a. Démontrer que g est solution de l'équation $(E_2) : y'' + y = 0$.

b. En déduire l'existence de deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

c. Montrer que g est une fonction paire puis, en considérant $g(\frac{\pi}{2})$ et $g(-\frac{\pi}{2})$, en déduire que $B = 0$.

d. Montrer que f est solution de l'équation $(E_3) : y'' - y = -A\cos(x) + x$.

e. Soit C et D deux réels et $h : x \longmapsto C\cos(x) + D\sin(x)$. Déterminer C et D tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) - h(x) = -A\cos(x)$.

f. En déduire la forme de f.

3. Réciproquement, déterminer l'ensemble des solutions du problème.

Solution.

1. L'équation homogène associée à (E_1) est $(H_1) : y'' - y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $(C_1) : x^2 - 1 = 0$. Les solutions de (C_1) sont 1 et -1 donc, par théorème, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (H_1) \text{ est } \{x \longmapsto A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$.

2. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $g'(x) = f'(x) - f'(-x)$. De même, g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g''(x) = f''(x) - (-f''(-x)) = f''(x) + f''(-x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$g''(x) + g(x) = f''(x) + f''(-x) + f(x) + f(-x) = f''(x) + f(-x) + f''(-x) + f(x).$$

Or, comme f est solution de problème, pour tout réel x, $f''(x) + f(-x) = x$ et donc, pour tout réel x, $f''(-x) + f(-(-x)) = -x$ i.e. $f''(-x) + f(x) = -x$. Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) + g(x) = x + (-x) = 0$ donc $\boxed{g \text{ est bien solution de } (E_2)}$.

b. L'équation caractéristique associée à (E_2) est $(C_2) : x^2 + 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions complexes conjuguées : $\vec{\imath}$ et $-\vec{\imath}$. Par théorème, l'ensemble des solutions de (E_2) est donc $\{x \longmapsto \mathrm{e}^{0x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$ i.e. $\{x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que, pour tout réel } x,\ g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)}$.

c. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est paire}}$.

On en déduit que $g(\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2})$ i.e. $A\cos(\frac{\pi}{2}) + B\sin(\frac{\pi}{2}) = A\cos(-\frac{\pi}{2}) + B\sin(-\frac{\pi}{2})$ donc $B = -B$ et ainsi $\boxed{B = 0}$.

d. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $g(x) = A\cos(x)$ i.e. $f(x) + f(-x) = A\cos(x)$. Dès lors, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x) + A\cos(x)$ donc, comme, pour tout réel x, $f''(x) + f(-x) = x$, $f''(x) + (-f(x) + A\cos(x)) = x$ soit finalement, $f''(x) - f(x) = -A\cos(x) + x$.

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est solution de } (E_3)}$.

e. La fonction h est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = -C\sin(x)$ et $h''(x) = -C\cos(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) - h(x) = -C\cos(x) - C\cos(x) = -2C\cos(x).$$

Ainsi, pour que h convienne, il suffit que $-2C = A$ i.e. $\boxed{C = \dfrac{A}{2}}$.

f. Par le principe de superposition, on déduit des questions **1.** et **2.e.** que la fonction $x \longmapsto \dfrac{A}{2}\cos(x) - x$ est une solution de (E_3). De plus, l'équation homogène associée à (E_3) est (H_1) qu'on a résolu dans la question **1.** donc les solutions de (E_3) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{A}{2}\cos(x) - x + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe des constantes } A,\ E \text{ et } F \text{ telles que } f : x \longmapsto \dfrac{A}{2}\cos(x) - x + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x}}$.

3. Réciproquement, soit A, E et F des réels et $f : x \longmapsto \dfrac{A}{2}\cos(x) - x + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x}$. Alors, f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{A}{2}\sin(x) - 1 + E\mathrm{e}^{x} - F\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = -\dfrac{A}{2}\cos(x) + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) + f(-x) &= -\frac{A}{2}\cos(x) + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{A}{2}\cos(-x) - (-x) + E\mathrm{e}^{-x} + F\mathrm{e}^{-(-x)}\right) \\ &= -\frac{A}{2}\cos(x) + E\mathrm{e}^{x} + F\mathrm{e}^{-x} + \frac{A}{2}\cos(x) + x + E\mathrm{e}^{-x} + F\mathrm{e}^{x} \\ &= x + (E+F)(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème si et seulement si, pour tout réel x, $(E+F)(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}) = 0$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $(E+F) \times 2 = 0$ donc $E + F = 0$ i.e. $F = -E$. De plus, dans ce cas, le calcul précédent montre que, pour tout réel x, $f''(x) + f(-x) = x$ donc f est solution du problème. On conclut que les solutions du problème sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{A}{2}\cos(x) - x + E\mathrm{e}^{x} - E\mathrm{e}^{-x}$ où $(A, E) \in \mathbb{R}^2$.

On peut remarquer, de plus, que lorsque A prend toutes les valeurs réelles, $\frac{A}{2}$ aussi (car la fonction affine $x \longmapsto -\frac{x}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Ainsi, finalement, (en posant $\lambda = \frac{A}{2}$ et $\mu = E$), l'ensemble des solutions du problème est

$$\boxed{\{x \longmapsto \lambda\cos(x) - x + \mu(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}.$$