Devoir à la maison n°8

À rendre le vendredi 29 mars 2024

Exercice 1. Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes P vérifiant l'équation :

$$(E)\ :\ P'^2 = P''^2 P$$

où P' est le polynôme dérivé de P et P'' est le polynôme dérivé de P'.

1. Montrer que les polynômes constants sont solutions de (E).

2. Existe-t-il des polynômes de degré 1 solutions de (E) ?

3. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$ solution de (E).

a. Démontrer que $n = 2$.
Ainsi, P est un polynôme du second degré donc il existe des réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.

b. Montrer que a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} 4a^2 = 4a^3 \\ 4ab = 4a^2 b \\ b^2 = 4a^2 c \end{cases}.$$

c. En déduire la forme du polynôme P.

4. Réciproquement, montrer que tous les polynômes de la forme précédente sont solutions de (E).

5. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2. On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' - y = x$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

2. On suppose que f est une solution du problème étudié et on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$.

a. Démontrer que g est solution de l'équation $(E_2) : y'' + y = 0$.

b. En déduire l'existence de deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

c. Montrer que g est une fonction paire puis, en considérant $g(\frac{\pi}{2})$ et $g(-\frac{\pi}{2})$, en déduire que $B = 0$.

d. Montrer que f est solution de l'équation $(E_3) : y'' - y = -A\cos(x) + x$.

e. Soit C un réel et $h : x \longmapsto C\cos(x)$. Déterminer C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) - h(x) = -A\cos(x)$.

f. En déduire la forme de f.

3. Réciproquement, déterminer l'ensemble des solutions du problème.