

## Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 4 mars 2026

Soit  $a$  un réel différent de 1. On pose  $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1.
  - a. Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
  - b. Calculer  $D = P^{-1}AP$ .
  - c. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n$ .
  - d. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
  - e. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(2a-1)^n}{2} & \frac{1-(2a-1)^n}{2} \\ \frac{1-(2a-1)^n}{2} & \frac{1+(2a-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

2. On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$ .
  - a. Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On pose  $N = P^{-1}MP$ .  
Démontrer que  $M \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $N^2 = D$ .
  - b. Soit  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $N^2 = D$ .
    - i. Montrer que  $N$  et  $D$  commutent.
    - ii. En écrivant  $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  avec  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ , déduire de la question précédente que  $N$  est une matrice diagonale.
  - c. Déterminer l'ensemble des matrices  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $N^2 = D$ . (On distinguera selon les valeurs de  $a$ .)
  - d. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  en fonction de la valeur du réel  $a$ .

**Solution.**

1. a. Le déterminant de  $P$  est  $\det(P) = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$  donc  $P$  est inversible.

De plus,  $P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  i.e.  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

b. On a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2a-1 & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$ .

c. Comme  $D$  est une matrice diagonale, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix}$  i.e.

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix}$ .

d. Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : «  $A^n = PD^nP^{-1}$  ».

**Initialisation.** Comme  $A^0 = I_2$  et  $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ ,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors, étant donné que  $D = P^{-1}AP$ ,  $A = PDP^{-1}$  donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

et ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.** Par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

e. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2a-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (2a-1)^n \\ 1 & -(2a-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2a-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2a-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2a-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2a-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(2a-1)^n}{2} & \frac{1-(2a-1)^n}{2} \\ \frac{1-(2a-1)^n}{2} & \frac{1+(2a-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

2. a. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff M^2 = A \iff (PNP^{-1})^2 = PDP^{-1} \\ &\iff (PNP^{-1})(PNP^{-1}) = PDP^{-1} \\ &\iff PNP^{-1}PNP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff PNI_2NP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff N^2 = P^{-1}PDP^{-1}P \\ &\iff N^2 = D \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que  $M^2 \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $N^2 = D$ .

b. i. Comme  $N^2 = D$ ,  $ND = NN^2 = N^3 = N^2N = DN$  donc  $N$  et  $D$  commutent.

ii. Écrivons  $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  avec  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors,

$$ND = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y(2a-1) \\ z & t(2a-1) \end{pmatrix}$$

et

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ (2a-1)z & (2a-1)t \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $z = (2a-1)z$  et que  $y(2a-1) = y$  donc  $0 = (2a-1)z - z$  et  $y(2a-1) - y = 0$ . Dès lors,  $(2a-2)z = 0$  et  $(2a-2)y = 0$  et, comme  $a \neq 1$ ,  $2a-2 \neq 0$  donc  $z = 0$  et  $y = 0$ . Ainsi  $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$  et on conclut donc que

$N$  est une matrice diagonale.

c. Soit  $N$  un matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = D$ . D'après la question précédente,  $N$  est diagonale. Réciproquement, soit  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice diagonale. Alors, il existe deux réels  $x$  et  $t$  tels que  $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ . Dès lors,  $N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$  donc

$$N^2 = D \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ t^2 = 2a-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ t^2 = 2a-1 \end{cases}$$

Distinguons 3 cas.

- Si  $a < \frac{1}{2}$  alors  $2a-1 < 0$  donc l'équation  $t^2 = 2a-1$  n'a pas de solution réelle. Par suite, il n'existe pas de matrices  $N$  telles que  $N^2 = D$ .
- Si  $a = \frac{1}{2}$  alors  $2a-1 = 0$  donc l'équation  $t^2 = 2a-1$  admet 0 comme unique solution. Par suite, il existe deux matrices  $N$  telles que  $N^2 = D$  : la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Si  $a > \frac{1}{2}$  alors  $2a-1 > 0$  donc l'équation  $t^2 = 2a-1$  possède deux solutions réelles :  $\sqrt{2a-1}$  et  $-\sqrt{2a-1}$ . Par suite, il existe quatre matrices  $N$  telles que  $N^2 = D$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$ .  
Ainsi, en posant  $r = \sqrt{2a-1}$  lorsque  $a > \frac{1}{2}$ , on conclut que l'ensemble des matrices  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $N^2 = D$  est :

$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } a < \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} & \text{si } a = \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \right\} & \text{si } a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a vu que  $M \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $N^2 = D$  avec  $N = PMP^{-1}$  i.e.  $M = P^{-1}NP$ .

Or

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+r}{2} & \frac{1-r}{2} \\ \frac{1-r}{2} & \frac{1+r}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ r & -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+r}{2} & \frac{-1-r}{2} \\ \frac{-1-r}{2} & \frac{-1+r}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r}{2} & \frac{1+r}{2} \\ \frac{1+r}{2} & \frac{1-r}{2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-r}{2} & \frac{-1+r}{2} \\ \frac{-1+r}{2} & \frac{-1-r}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut qu'en posant  $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$  et  $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}$  lorsque  $a > \frac{1}{2}$ ,

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} & \text{si } a = \frac{1}{2} \\ \left\{ \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\rho_2 & -\rho_1 \\ -\rho_1 & -\rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\rho_1 & -\rho_2 \\ -\rho_2 & -\rho_1 \end{pmatrix} \right\} & \text{si } a > \frac{1}{2} \end{cases}$$