

Devoir à la maison n°8

À rendre le mercredi 4 mars 2026

Soit a un réel différent de 1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.
 - a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b. Calculer $D = P^{-1}AP$.
 - c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n .
 - d. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
 - e. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(2a-1)^n}{2} & \frac{1-(2a-1)^n}{2} \\ \frac{1-(2a-1)^n}{2} & \frac{1+(2a-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

2. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.
 - a. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
Démontrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $N^2 = D$.
 - b. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $N^2 = D$.
 - i. Montrer que N et D commutent.
 - ii. En écrivant $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déduire de la question précédente que N est une matrice diagonale.
 - c. Déterminer l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = D$. (On distinguera selon les valeurs de a .)
 - d. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ en fonction de la valeur du réel a .