Devoir à la maison n°8 — Correction

À rendre le mercredi 26 mars 2025

Exercice 1.

1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer M^2 puis M^3.

b. Montrer qu'il existe un réel α tel que $M^3 - 4M^2 - 11M = \alpha I_3$.

c. Déduire de la question précédente que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M.

d. En déduire une expression explicite de M^{-1}.

2. Soit P un polynôme unitaire de degré 3 tel que $P(1) = -18$, $P(2) = -24$ et $P(3) = -20$. On note a, b et c les coefficients de P c'est-à-dire on écrit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

a. Montrer que (a, b, c) est solution du système

$$(S) \begin{cases} x + y + z = -19 \\ 4x + 2y + z = -32 \\ 9x + 3y + z = -47 \end{cases}.$$

b. À l'aide de la question **1.**, résoudre (S) et en déduire l'expression de P.

c. Vérifier que 4 est une racine de P. Est-ce une racine multiple de P ?

d. Factoriser P puis déterminer l'ensemble des racines de P.

Solution.

1. a. On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 3 \\ 21 & 11 & 7 \\ 30 & 18 & 13 \end{pmatrix}$ et que $M^3 = \begin{pmatrix} 65 & 35 & 23 \\ 128 & 64 & 39 \\ 219 & 105 & 61 \end{pmatrix}$.

b. On en déduit que

$$M^3 - 4M^2 - 11M = \begin{pmatrix} 65 & 35 & 23 \\ 128 & 64 & 39 \\ 219 & 105 & 61 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 56 & 24 & 12 \\ 84 & 44 & 28 \\ 120 & 72 & 52 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 44 & 22 & 11 \\ 99 & 33 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M^3 - 4M^2 - 11M = -2I_3}$.

c. Ainsi, $M(M^2 - 4M - 11I_3) = -2I_3$ donc $-\frac{1}{2}M(M^2 - 4M - 11I_3) = I_3$ et, par propriété, il s'ensuit que $M\left(-\frac{1}{2}(M^2 - 4M - 11I_3)\right) = I_3$.

On en déduit que $\boxed{M \text{ est inversible et que } M^{-1} = -\frac{1}{2}(M^2 - 4M - 11I_3)}$.

d. Dès lors,

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 3 \\ 21 & 11 & 7 \\ 30 & 18 & 13 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$

2. a. Tout d'abord, $P(1) = 1^3 + a \times 1^2 + b \times 1 + c = 1 + a + b + c$ donc, comme $P(1) = -18$, $a + b + c = -18 - 1 = -19$.
Ensuite, $P(2) = 2^3 + a \times 2^2 + b \times 2 + c = 8 + 4a + 2b + c$ donc, comme $P(2) = -24$, $4a + 2b + c = -24 - 8 = -32$.
Enfin, $P(3) = 3^3 + a \times 13^2 + b \times 3 + c = 27 + 9a + 3b + c$ donc, comme $P(3) = -20 - 27$, $9a + 3b + c = -47$.
Ainsi, $\boxed{(a, b, c) \text{ est bien solution du système } (S)}$.

b. L'écriture matricielle de (S) est $MX = B$ où M est la matrice de la question **1.**, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -19 \\ -32 \\ -47 \end{pmatrix}$. Comme M est inversible, on en déduit que

$$(S) \iff MX = B \iff X = M^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } (-1, -10, -8)}$. Ainsi, $a = -1$, $b = -10$ et $c = -8$ donc $\boxed{P = X^3 - X^2 - 10X - 8}$.

c. Comme $P(4) = 4^3 - 4^2 - 10 \times 4 - 8 = 64 - 16 - 40 - 8 = 0$, $\boxed{4 \text{ est une racine de } P}$.
De plus, $P' = 3X^2 - 2X - 10$ donc $P'(4) = 3 \times 4^2 - 2 \times 4 - 10 = 30 \neq 0$ donc <u>2 n'est pas une racine multiple de P</u>.

d. Comme 4 est une racine de P, il existe des réels d, e et f tels que $P = (X - 4)(aX^2 + bX + c)$. Or, pour tous réels d, e et f,

$$(X-4)(dX^2+eX+f) = dX^3+ex^2+fX-4dX^2-4eX-4f = dX^3+(e-4d)X^2+(f-4e)X-4f$$

donc

$$P = (X - 4)(dX^2 + eX + f) \iff \begin{cases} d = 1 \\ e - 4d = -1 \\ f - 4e = -10 \\ -4f = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1 \\ e = 3 \\ f = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, $P = (X - 4)(X^2 + 3X + 2)$.
Il s'ensuit de que, pour tout réel x,

$$P(x) = 0 \iff (x - 4)(x^2 + 3x + 2) = 0 \iff x - 4 = 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 + 3X + 2$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = -1.$$

On conclut donc que, pour tout réel x,

$$P(x) = 0 \iff x = 4 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des racines de } P \text{ est } \{4, -1, -2\}}$.