Devoir à la maison n°7

À rendre le mercredi 11 février 2026

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $f'(x)$.

3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;1[$ et déterminer f^{-1}.

Partie B. — On note A le point d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$.

1. Déterminer l'ordonnée de A.

2. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A est $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2.$$

a. Calculer, pour tout réel x, $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $g''(x)$ et en déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $g'(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$ puis les variations de g sur $\mathbb{R}$.

d. Calculer $g(0)$ et en déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$.

e. Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = \frac{g(x)}{4(1+\mathrm{e}^x)}$$

et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de T.

4. On dit qu'un point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M})$ est centre de symétrie de la courbe d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ si, pour tout réel x, $\dfrac{h(x_\mathrm{M}+x)+h(x_\mathrm{M}-x)}{2} = y_\mathrm{M}$.

Montrer que le point A est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.