Corrigé du devoir à la maison n°7

On considère les matrices M, P et D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -14 & -19 \\ 10 & -13 & -18 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. a. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. En utilisant la question précédente, résoudre le système

$$(S) \begin{cases} -x+y+3z=-1 \\ 2x+2y+z=-2 \\ -2x-y+z=2 \end{cases}.$$

2. Montrer que $PDP^{-1} = M$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = M$ si n est impair et $M^n = M^2$ si M est pair.

5. On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $A^3 = D$.

a. Démontrer que $AD = DA$.

b. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, utiliser la question précédente pour montrer que A est une matrice diagonale.

c. En déduire que $A = D$.

6. On suppose que $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $B^3 = M$.

a. Démontrer que $P^{-1}B^3P = D$ et en déduire que $(P^{-1}BP)^3 = D$.

b. En déduire la valeur de B.

Solution.

1. a. Considérons le système suivant :

$$(S_P) \begin{cases} -x+y+3z=a & L_1 \\ 2x+2y+z=b & L_2 \\ -2x-y+z=c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(S_P) \iff \begin{cases} -x+y+3z=a & L_1 \\ 4y+7z=2a+b & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ -3y-5z=-2a+c & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y+3z=a & L_1 \\ 4y+7z=2a+b & L_2 \\ \frac{1}{4}z=-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b+c & L_3 \leftarrow L_3+\frac{3}{4}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x+y+3(-2a+3b+4c)=a \\ 4y+7(-2a+3b+4c)=2a+b \\ z=-2a+3b+4c \end{cases} \iff \begin{cases} -x+(4a-5b-7c)-6a+9b+12c=a \\ y=4a-5b-7c \\ z=-2a+3b+4c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-3a+4b+5c \\ y=4a-5b-7c \\ z=-2a+3b+4c \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est inversible est } P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$.

b. L'écriture matricielle de (S) est $PX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et, comme P est inversible,

$$PX = B \iff X = P^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } (5, -8, 4)}$.

2. On vérifie que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -14 & -19 \\ 10 & -13 & -18 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{PDP^{-1} = M}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H_n : « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation. $M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc H_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$M^{n+1} = M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nD^{-1}P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc H_{n+1} est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = PD^nP^{-1}}.$$

4. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ donc $D^n = D$ et ainsi, par la question précédente, $M^n = PD^nP^{-1} = PDP^{-1} = M$.
Si n est pair, on a $(-1)^n = 1 = 1^2$ donc $D^n = D^2$ et ainsi, par la question précédente, $M^n = PD^nP^{-1} = PD^2P^{-1} = M^2$.
On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, M^n = M \text{ si } n \text{ est impair et } M^n = M^2 \text{ si } n \text{ est pair}}$.

5. a. Comme $A^3 = D$, $AD = A(A^3) = A^4 = (A^3)A = DA$ donc $\boxed{AD = DA}$.

b. Écrivons $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors,

$$AD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ 0 & e & -f \\ 0 & h & -i \end{pmatrix}$$

et

$$DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme $AD = DA$,

$$\begin{cases} b = 0 \\ -c = 0 \\ d = 0 \\ f = -f \\ -g = 0 \\ h = -h \end{cases}$$

donc $b = c = d = f = g = h = 0$. On en déduit que $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{A \text{ est diagonale}}$.

c. En écrivant A sous la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ avec $(a, e, i) \in \mathbb{R}^3$, on a $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & i^3 \end{pmatrix}$ donc, comme $A^3 = D$, $a^3 = 0 = 0^3$, $e^3 = 1 = 1^3$ et $i^3 = -1 = (-1)^3$. Or, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on conclut que $a = 0$, $e = 1$ et $i = -1$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{A = D}$.

6. a. Comme $B^3 = M$ et $M = PDP^{-1}$, $B^3 = PDP^{-1}$ donc $P^{-1}B^3P = D$. Or, Or, par associativité du produit matricielle,

$$\begin{aligned}(P^{-1}BP)^3 &= (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) \\ &= P^{-1}B(PP^{-1})B(PP^{-1})BP \\ &= P^{-1}BI_3BI_3BP = P^{-1}B^3P\end{aligned}$$

donc $\boxed{(PBP^{-1})^3 = D}$.

b. On déduit alors de la question précédente que $PBP^{-1} = D$ donc $B = P^{-1}DP$ c'est-à-dire $\boxed{B = M}$.