Devoir à la maison n°7

À rendre le mercredi 13 mars 2024

On considère les matrices M, P et D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -14 & -19 \\ 10 & -13 & -18 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. En utilisant la question précédente, résoudre le système

$$(S) \begin{cases} -x + y + 3z = -1 \\ 2x + 2y + z = -2 \\ -2x - y + z = 2 \end{cases}.$$

2. Montrer que $PDP^{-1} = M$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = M$ si n est impair et $M^n = M^2$ si M est pair.

5. On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $A^3 = D$.

a. Démontrer que $AD = DA$.

b. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, utiliser la question précédente pour montrer que A est une matrice diagonale.

c. En déduire que $A = D$.

6. On suppose que $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice telle que $B^3 = M$.

a. Démontrer que $P^{-1}B^3P = D$ et en déduire que $(P^{-1}BP)^3 = D$.

b. En déduire la valeur de B.