Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 28 janvier 2026

On considère le nombre complexe $w = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Le but de ce qui suit est de déterminer, de deux façons différentes, les racines carrées complexes de w c'est-à-dire de déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 = w$.

1. **1$^{\text{re}}$ méthode : en utilisant la forme algébrique**

   Soit a et b deux réels et $z = a + \mathrm{i}b$. On suppose que $z^2 = w$.

   a. Montrer que $a^2 - b^2 = -2$ et que $ab = \sqrt{3}$.

   b. Calculer le module de w et en déduire que $a^2 + b^2 = 4$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant

   $$(S)\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases} .$$

   d. Déduire de la question précédente qu'il y a 4 valeurs possibles pour le couple (a, b) et déterminer ces 4 valeurs.

   e. En utilisant la question **a.**, justifier que 2 des 4 valeurs précédentes sont en fait à éliminer et en déduire les seuls deux valeurs possibles pour z.

   f. Réciproquement, vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien des racines carrées complexes de w.

2. **2$^{\text{de}}$ méthode : en utilisant une forme exponentielle**

   Soit r et θ deux réels tels que $r > 0$. Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On suppose que $z^2 = w$.

   a. Déterminer une forme exponentielle de w.

   b. En déduire que $r^2 = 4$ et que $2\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

   c. En déduire la valeur de r et les valeurs possibles pour θ modulo 2π.

   d. Retrouver alors le résultat de la question **1.**

Solution.

1. 1$^{\text{re}}$ méthode : en utilisant la forme algébrique

a. Calculons z^2 :

$$z^2 = (a + \mathrm{i}b)^2 = a^2 + 2a\mathrm{i}b + (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + \mathrm{i}(2ab) - b^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab).$$

Or, par hypothèse, $z^2 = w$ donc, en égalant parties réelles et parties imaginaires, on en déduit que $a^2 - b^2 = -2$ et que $2ab = 2\sqrt{3}$ i.e. $\boxed{a^2 - b^2 = -2 \text{ et } ab = \sqrt{3}}$.

b. Par définition, $|w| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16}$ donc $\boxed{|w| = 4}$.

Par ailleurs, $z^2 = w$ donc $|z^2| = |w| = 4$. Or, $|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$ donc $\boxed{a^2 + b^2 = 4}$.

c. Pour tous réels x et y,

$$(S)\begin{cases} x - y = -2 & L_1 \\ x + y = 4 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = -2 & L_1 \\ 2y = 6 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3 = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (S) \text{ est } \{(1,3)\}}$.

d. Comme $a^2 - b^2 = -2$ et $a^2 + b^2 = 4$, (a^2, b^2) est une solution de (S) donc $a^2 = 1$ et $b^2 = 3$. Or, $a^2 = 1$ équivaut à $\sqrt{a^2} = \sqrt{1}$ i.e. $_{a}bsa = 1$ soit $a = -1$ ou $a = 1$ et, de même, $b^2 = 3$ équivaut à $\sqrt{b^2} = \sqrt{3}$ i.e. $_{a}bsb = \sqrt{3}$ soit $a = -\sqrt{3}$ ou $a = \sqrt{3}$. Ainsi, $\boxed{\text{les 4 valeurs possibles pour } (a,b) \text{ sont } (-1,-\sqrt{3}),\ (-1,\sqrt{3}),\ (1,-\sqrt{3}) \text{ et } (1,\sqrt{3})}$.

e. On a vu en question **a.** que $ab = \sqrt{3}$ donc a et b sont de même signe, ce qui permet d'éliminer les couples $(-1, \sqrt{3})$ et $1, -\sqrt{3})$.

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs possibles pour } z \text{ sont } 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

f. Réciproquement,

$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + (\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 = -1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = w$$

et

$$(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^2 = (-(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}))^2 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^2 = w$$

donc $\boxed{\text{les deux racines carrées complexes de } z \text{ sont } 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

2. 2$^{\text{de}}$ méthode : en utilisant une forme exponentielle

a. On a vu en question **1.b.** que $|w| = 4$. On écrit alors

$$w = 4\left(-\frac{2}{4} + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

donc $\boxed{w = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$.

b. Par ailleurs, $w = z^2 = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}$ donc, comme $r^2 > 0$, on déduit de la question précédente que $\boxed{r^2 = 4 \text{ et } 2\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$.

c. Ainsi, $\sqrt{r^2} = \sqrt{4}$ donc $|r| = 2$ et, comme $r > 0$, on conclut que $\boxed{r = 2}$. De plus, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ $[\pi]$ i.e. $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi$ $[2\pi]$. Ainsi, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ $[2\pi]$.

d. On déduit de la question précédente que

$$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

ou

$$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On retrouve ainsi bien les deux valeurs possibles $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et, comme on l'a vu en question **1.f.**, ces deux valeurs sont bien des racines carrées complexes de w. Ainsi, on retrouve $\boxed{\text{les racines carrées complexes de } w \text{ sont } 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.