Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 28 janvier 2026

On considère le nombre complexe $w = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Le but de ce qui suit est de déterminer, de deux façons différentes, les racines carrées complexes de w c'est-à-dire de déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 = w$.

1. **1$^{\text{re}}$ méthode : en utilisant la forme algébrique**

   Soit a et b deux réels et $z = a + \mathrm{i}b$. On suppose que $z^2 = w$.

   a. Montrer que $a^2 - b^2 = -2$ et que $ab = \sqrt{3}$.

   b. Calculer le module de w et en déduire que $a^2 + b^2 = 4$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant

   $$(S)\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

   d. Déduire de la question précédente qu'il y a 4 valeurs possibles pour le couple (a, b) et déterminer ces 4 valeurs.

   e. En utilisant la question **a.**, justifier que 2 des 4 valeurs précédentes sont en fait à éliminer et en déduire les seuls deux valeurs possibles pour z.

   f. Réciproquement, vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien des racines carrées complexes de w.

2. **2$^{\text{de}}$ méthode : en utilisant une forme exponentielle**

   Soit r et θ deux réels tels que $r > 0$. Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On suppose que $z^2 = w$.

   a. Déterminer une forme exponentielle de w.

   b. En déduire que $r^2 = 4$ et que $2\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

   c. En déduire la valeur de r et les valeurs possibles pour θ modulo 2π.

   d. Retrouver alors le résultat de la question **1.**