Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 31 janvier 2024

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. On dira que M' est l'image de M.

On note A, B et C les points d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B.

2. Déterminer les points M ayant comme image le point C. On donnera les affixes de ces points sous forme exponentielle.

3. Dans cette question, on suppose que M est un point d'affixe z de la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right]$.

- **a.** Lorsque θ décrit $\left]-\pi\,;\pi\right]$, quel est l'ensemble décrit par le point M ?
- **b.** Exprimer la forme algébrique de z' en fonction de θ.
- **c.** Lorsque θ décrit $\left]-\pi\,;\pi\right]$, quel est l'ensemble décrit par l'image M' de M ?

4. Dans cette question, on suppose que M est un point d'affixe z non nul quelconque. On note r le module de z et θ un argument de z. On note, de plus, N le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

- **a.** Que représente le point M' relativement aux points M et N ? (Justifier.)
- **b.** Déterminer, en fonction de r et de θ, le module et un argument de z_N.
- **c.** Expliquer en détail comment on peut construire l'image de M' en connaissant seulement le point M (c'est-à-dire sans connaître la valeur de z). Cette construction devra pouvoir se faire uniquement à la règle et au compas et sans aucun calcul.

  Mettre en œuvre cette méthode en prenant un point quelconque dans le plan dont on ne connait pas l'affixe (ni sous forme algébrique ni sous forme trigonométrique).

Solution.

1. $z_{\mathrm{A'}} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{i} + \dfrac{1}{\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{i} - \mathrm{i})$ donc $\boxed{z_{\mathrm{A'}} = 0}$ (autrement dit, $\mathrm{A}' = \mathrm{O}$).

$z_{\mathrm{B'}} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)$ donc $\boxed{z_{\mathrm{B'}} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}}$.

2. On cherche les complexes $z \neq 0$ tels que $z' = z_{\mathrm{C}}$:

$$z' = z_{\mathrm{C}} \iff \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \iff z + \frac{1}{z} = 1 \iff z^2 + 1 = z \iff z^2 - z + 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc ce trinôme a deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-(-1) - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, $z_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et donc $z_2 = \overline{z_1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. On conclut que $\boxed{\text{les points ayant pour image le point C sont les points d'affixes } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \text{ et } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

3. a. Lorsque θ décrit $]-\pi\,;\pi]$,, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ parcourt $\mathbb{U}$ donc $\boxed{M \text{ décrit le cercle trigonométrique}}$

b. $z' = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos(\theta)$ donc $\boxed{z' = \cos(\theta)}$.

c. Par définition du cosinus, lorsque θ décrit $]-\pi\,;\pi]$, $\boxed{M' \text{ décrit le segment [IK]}}$ où I est le point d'affixe 1 et K le point d'affixe -1.

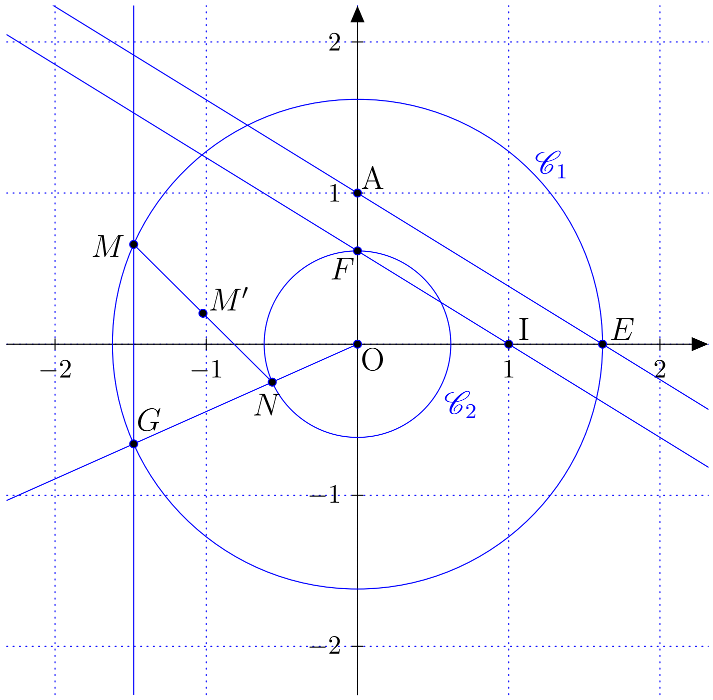
4. a. Par définition, $z_{M'} = z' = \dfrac{z_M + z_N}{2}$. Ainsi, si les coordonnées de M et N sont (x_M, y_M) et (x_N, y_N) alors

$$z_{M'} = \frac{x_M + \mathrm{i}\,y_M + x_N + \mathrm{i}\,y_N}{2} = \frac{x_M + x_N}{2} + \frac{y_M + y_N}{2}\mathrm{i}$$

donc les coordonnées de M' sont $\left(\dfrac{x_M + x_N}{2}, \dfrac{y_M + y_N}{2}\right)$ et, ainsi, on conclut que $\boxed{M' \text{ est le milieu du segment } [MN]}$.

b. Par définition, $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ donc $z_N = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$. Dès lors, comme $\dfrac{1}{r} > 0$, on conclut que $\boxed{|z_N| = \dfrac{1}{r} \text{ et } \arg(z_N) = -\theta\ [2\pi]}$.

c. Considérons un point M quelconque d'affixe $z \neq 0$. On note comme précédemment $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$. On trace le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O passant par M. Par définition, son rayon est $r = |z|$. Considérons le point E, intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et du demi-axe des réels positifs. On trace la droite $(\mathrm{A}E)$ (où A est le point d'affixe i) puis la parallèle $(\mathrm{A}E)$ passant par le point I d'affixe 1 (ce qui peut se faire au compas en construisant un parallélogramme). Cette droite coupe l'axe des imaginaires purs en un point F. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{\mathrm{O}F}{\mathrm{OA}} = \dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{O}E}$ donc $\mathrm{O}F = \dfrac{1}{r} = |z_N|$. On construit ensuite le symétrique G de M par rapport à l'axe des abscisses. Un argument de z_G est $-\theta = \arg(z_N)$ $[2\pi]$. On construit le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre O passant par F puis la demi-droite $[\mathrm{O}G)$: elle coupe le cercle $\mathscr{C}_2$ en un point dont l'affixe a pour module $\dfrac{1}{r}$ et pour argument $-\theta$: il s'agit donc de N. Il ne reste plus, alors, qu'à construire le milieu M' de $[MN]$ (ce qui peut se faire à la règle et au compas en construisant la médiatrice de $[MN]$).



2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
A
M
M′
F
I
E
O
G
N
$\mathscr{C}_1$
$\mathscr{C}_2$