Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 31 janvier 2024

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. On dira que M' est l'image de M.

On note A, B et C les points d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B.

2. Déterminer les points M ayant comme image le point C. On donnera les affixes de ces points sous forme exponentielle.

3. Dans cette question, on suppose que M est un point d'affixe z de la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right]$.

- **a.** Lorsque θ décrit $\left]-\pi\,;\pi\right]$, quel est l'ensemble décrit par le point M ?
- **b.** Exprimer la forme algébrique de z' en fonction de θ.
- **c.** Lorsque θ décrit $\left]-\pi\,;\pi\right]$, quel est l'ensemble décrit par l'image M' de M ?

4. Dans cette question, on suppose que M est un point d'affixe z non nul quelconque. On note r le module de z et θ un argument de z. On note, de plus, N le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

- **a.** Que représente le point M' relativement aux points M et N ? (Justifier.)
- **b.** Déterminer, en fonction de r et de θ, le module et un argument de z_N.
- **c.** Expliquer en détail comment on peut <u>construire</u> l'image de M' en connaissant seulement le point M (c'est-à-dire sans connaître la valeur de z). Cette construction devra pouvoir se faire uniquement à la règle et au compas et <u>sans aucun calcul</u>.

  Mettre en œuvre cette méthode en prenant un point <u>quelconque</u> dans le plan dont on ne connait pas l'affixe (ni sous forme algébrique ni sous forme trigonométrique).