Devoir à la maison n°5

À rendre le mercredi 7 janvier 2026

Exercice 1. On considère un sac contenant 10 jetons : 6 jetons rouges numérotés de 1 à 6 et 4 jetons blancs numérotés de 7 à 10.

1. On tire successivement et avec remise 4 jetons dans le sac. On s'intéresse aux numéros tirés. Un tirage est donc une suite de 4 nombres, par exemple : 3, 5, 1, 3.

- **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de tirages ne donnant que des nombres pairs ?
- **c.** Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un nombre impair ?
- **d.** Combien y a-t-il de tirages contenant 2 nombres pairs et 2 nombres impairs ?

2. On tire successivement et avec remise 4 jetons dans le sac. On s'intéresse seulement aux couleurs tirées. Un tirage est donc une suite de 4 couleurs, par exemple : rouge, rouge, blanc, rouge.

- **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de tirages ne donnant que des jetons rouges
- **c.** Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un jeton blanc ?
- **d.** Combien y a-t-il de tirages contenant 2 jetons rouges et 2 jetons blancs ?

3. Reprendre l'ensemble de la question 1 en supposant qu'on effectue 4 tirages successifs mais sans remise.

4. Reprendre l'ensemble de la question 1 en supposant qu'on effectue un tirage simultané de 4 jetons dans le sac.

5. Dans cette question, on suppose qu'on tire deux jetons dans le sac successivement et avec remise et on s'intéresse à la somme des deux numéros tirés. Par exemple, si on tire le jeton 3 puis le jeton 5, le résultat est $3 + 5 = 8$.

- **a.** Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de tirages qui donnent un résultat égal à 10 ?
- **c.** Combien y a-t-il de tirages qui donnent un résultat inférieur ou égal à 5 ?

Solution.

1. **a.** Un tirage est une 4-liste des nombres de 1 à 10. Il y a donc $10^4 = 10000$ tirages possibles.

- **b.** Un tirage ne donnant que des nombres pairs est une 4-liste des nombres 2, 4, 6, 8 et 10. Il y a donc $5^4 = 625$ tirages ne donnant que des nombres pairs.
- **c.** On en déduit qu'il y a $10000 - 625 = 9375$ tirages contenant au moins un nombre impair.
- **d.** Il y a $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ choix pour la place des nombres pairs. Ensuite, il y a 5^2 choix pour les deux nombres pairs et 5^2 choix pour les deux nombres impairs. Ainsi, par le principe multiplicatif, il y a $6 \times 5^2 \times 5^2 = 3750$ tirages contenant 2 nombres pairs et 2 nombres impairs.

2. **a.** Un tirage est un 4-liste des couleurs rouge et blanc. Il y a donc $2^4 = 16$ tirages possibles.
b. Il n'y a qu'un seul tirage ne donnant que des jetons rouge, il s'agit du tirage : rouge - rouge - rouge - rouge.
c. On en déduit qu'il y a $16 - 1 = 15$ tirages donnant au moins un jeton blanc.
d. Il suffit de choisir la place de jetons rouge (ou blanc, peu importe) : il y a $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ choix possibles donc il y a 6 tirages contenant exactement 2 jetons blancs et 2 jetons rouges.
3. **a.** Un tirage est un 4-arrangement des nombres de 1 à 10. Il y a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ tirages possibles.
b. Un tirage ne donnant que des nombres pairs est un 4-arrangement des nombres 2, 4, 6, 8 et 10. Il y a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ tirages ne donnant que des nombres pairs.
c. On en déduit qu'il y a $5040 - 120 = 4920$ tirages contenant au moins un nombre impair.
d. Il y a $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ choix pour la place des nombres pairs. Ensuite, il y a 5×4 choix pour les deux nombres pairs et 5×4 choix pour les deux nombres impairs. Ainsi, par le principe multiplicatif, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 2400$ tirages contenant 2 nombres pairs et 2 nombres impairs.
4. **a.** Un tirage est une 4-combinaison des nombres de 1 à 10. Il y a donc $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$ tirages possibles.
b. Un tirage ne donnant que des nombres pairs est une 4-combinaison des nombres 2, 4, 6, 8 et 10. Il y a donc $\binom{5}{4} = 5$ tirages ne donnant que des nombres pairs.
c. On en déduit qu'il y a $210 - 5 = 205$ tirages contenant au moins un nombre impair.
d. Il y a $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ choix pour les 2 nombres pairs et $\binom{5}{2} = 10$ choix pour les 2 nombres impairs. Ainsi, par le principe multiplicatif, il y a $10 \times 10 = 100$ tirages contenant 2 nombres pairs et 2 nombres impairs.
5. **a.** Les résultats possibles sont tous les entiers de $1 + 1 = 2$ à $10 + 10 = 20$. Ainsi, l'ensemble des résultats possibles est $[\![2, 20]\!]$.
b. Les tirages qui donnent un résultat égal à 10 donc $1/9$, $2/8$, $3/7$, $4/6$, $5/5$, $6/4$, $7/3$, $8/2$ et $9/1$: il y en a donc 9.
c. Les tirages qui donnent un résultat inférieur ou égal à 5 donc $1/1$, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $2/1$, $2/2$, $2/3$, $3/1$, $3/2$ et $4/1$; il y en a donc 10.

Exercice 2. On considère les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{3\ln(x)-1}{\ln(x)+2}$.

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
b. Écrire f sous forme réduite et en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
2. **a.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
b. En revenant à la définition et en utilisant le résultat de la question **1.**, étudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$.

c. Montrer que g réalise une bijection de $\mathcal{D}_g$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Solution.

1. **a.** L'ensemble des solutions de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b. Pour tout réel $x \neq -2$,

$$f(x) = 3 \times \frac{x-\frac{1}{3}}{x+2} = 3 \times \frac{x+2-2-\frac{1}{3}}{x+2} = 3\left(1 - \frac{\frac{7}{3}}{x+2}\right) = 3 - \frac{7}{x+2}$$

Ainsi, la forme réduite de f est : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f(x) = 3 + \dfrac{-7}{x+2}}$.

Comme $\beta = -7 < 0$, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty\,;-2[\text{ et sur }]-2\,;+\infty[}$.

2. **a.** $g(x)$ existe pour tout réel x tel que $x > 0$ et $\ln(x) + 2 \neq 0$. Or, $\ln(x) + 2 = 0$ équivaut à $\ln(x) = -2$ i.e. $x = \mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_g =]0\,;\mathrm{e}^{-2}[\,\cup\,]\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[}$.

b. Soit a et b deux réels et tels que $0 < a < b < \mathrm{e}^{-2}$. Alors, comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(a) < \ln(b) < 2$ donc, comme f est strictement croissante sur $]-\infty\,;2[$, $f(\ln(a)) < f(\ln(b))$ i.e. $g(a) < g(b)$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\mathrm{e}^{-2}[}$.

Soit a et b deux réels et tels que $\mathrm{e}^{-2} < a < b$. Alors, comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $2 < \ln(a) < \ln(b)$ donc, comme f est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$, $f(\ln(a)) < f(\ln(b))$ i.e. $g(a) < g(b)$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[}$.

c. Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $x \in \mathcal{D}_g$. Alors,

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = \frac{3\ln(x)-1}{\ln(x)+2} \iff y(\ln(x)+2) = 3\ln(x) - 1 \\ &\iff y\ln(x) - 3\ln(x) = -2y - 1 \iff (y-3)\ln(x) = -2y-1 \\ &\underset{y\neq 3}{\iff} \ln(x) = \frac{-2y-1}{y-3} \iff \ln(x) = \frac{1+2y}{3-y} \\ &\iff x = \mathrm{e}^{\frac{1+2y}{3-y}} \end{aligned}$$

Ainsi, g réalise une bijection de $\mathcal{D}_g$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow &]0\,;\mathrm{e}^{-2}[\,\cup\,]\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{1+2y}{3-y}} \end{array}}$$