

Devoir à la maison n°5

À rendre le mercredi 7 janvier 2026

Exercice 1. On considère un sac contenant 10 jetons : 6 jetons rouges numérotés de 1 à 6 et 4 jetons blancs numérotés de 7 à 10.

1. On tire successivement et avec remise 4 jetons dans le sac. On s'intéresse aux numéros tirés. Un tirage est donc une suite de 4 nombres, par exemple : 3, 5, 1, 3.
 - a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de tirages ne donnant que des nombres pairs ?
 - c. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un nombre impair ?
 - d. Combien y a-t-il de tirages contenant 2 nombres pairs et 2 nombres impairs ?
2. On tire successivement et avec remise 4 jetons dans le sac. On s'intéresse seulement aux couleurs tirées. Un tirage est donc une suite de 4 couleurs, par exemple : rouge, rouge, blanc, rouge.
 - a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de tirages ne donnant que des jetons rouges
 - c. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un jeton blanc ?
 - d. Combien y a-t-il de tirages contenant 2 jetons rouges et 2 jetons blancs ?
3. Reprendre l'ensemble de la question 1 en supposant qu'on effectue 4 tirages successifs mais sans remise.
4. Reprendre l'ensemble de la question 1 en supposant qu'on effectue un tirage simultané de 4 jetons dans le sac.
5. Dans cette question, on suppose qu'on tire deux jetons dans le sac successivement et avec remise et on s'intéresse à la somme des deux numéros tirés. Par exemple, si on tire le jeton 3 puis le jeton 5, le résultat est $3 + 5 = 8$.
 - a. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
 - b. Combien y a-t-il de tirages qui donnent un résultat égal à 10 ?
 - c. Combien y a-t-il de tirages qui donnent un résultat inférieur ou égal à 5 ?

Exercice 2. On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 2}$ et $g : x \mapsto \frac{3 \ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
b. Écrire f sous forme réduite et en déduire les variations de f sur \mathcal{D}_f .
2. a. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_g de g .
b. En revenant à la définition et en utilisant le résultat de la question 1., étudier les variations de g sur \mathcal{D}_g .
c. Montrer que g réalise une bijection de \mathcal{D}_g sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et déterminer sa bijection réciproque.