Devoir à la maison n°5

À rendre le mercredi 10 janvier 2024

Exercice 1. Lors d'un rencontre internationale, des sportifs français et japonais s'affrontent. La délégation française compte a personnes et la délégation japonaise b personnes. Tous les sportifs logent dans le même hôtel et le matin tous se saluent les uns les autres. Si deux athlètes de la même nationalité se saluent, il le font dans leur langue et si deux athlètes de nationalité différentes se saluent, ils le font en anglais.

1. Combien y a-t-il de salutations en français ? (Justifier.)

2. Combien y a-t-il de salutations en japonais ? (Justifier.)

3. Combien y a-t-il de salutations en anglais ? (Justifier.)

4. Déduire des questions précédentes que $\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}$.

5. Démontrer la relation précédente par le calcul.

Solution.

1. Les salutations en français ont lieu lorsque deux athlètes français se rencontrent. Il y a donc autant de salutations en français que de paires d'athlètes français i.e. $\boxed{\binom{a}{2}}$.

2. Pour la même raison, le nombre de salutations en japonais est $\boxed{\binom{b}{2}}$.

3. Les salutations en anglais ont lieu lorsqu'un des a athlètes français rencontre un des b athlètes japonais. Il y a donc autant de salutations en anglais de couples formés d'un athlète français et d'un athlète japonais à savoir $\boxed{ab}$.

4. En tout, il y a $a+b$ athlètes et le nombre total de salutations est, pour la même raison qu'en question **1.** et **2.**, $\binom{a+b}{2}$. Or, les salutations en français, en japonais et en anglais forment une partition de l'ensemble des salutations donc, par le principe additif, $\boxed{\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}}$.

5. Rappellons que, pour tout entier naturel n, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\binom{a+b}{2} &= \frac{(a+b)(a+b-1)}{2} = \frac{a^2+ab-a+ba+b^2-b}{2}\\ &= \frac{a^2-a+2ab+b^2-b}{2} = \frac{a(a-1)}{2} + ab + \frac{b(b-1)}{2}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}}$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3-2\,\mathrm{e}^{x}}{1+3\,\mathrm{e}^{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. On considère la fonction homographique $g : x \longmapsto \dfrac{3-2x}{1+3x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

b. Écrire g sous forme réduite.

c. En déduire les variations de g.

d. En utilisant les questions précédentes, montrer que g est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

3. En utilisant les variations de g et de la fonction exponentielle, montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. En utilisant la question **2.**, montrer que f est bornée par $-\dfrac{2}{3}$ et par 3.

5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{2}{3}\,;3\right[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Solution.

1. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $1+3\,\mathrm{e}^{x} > 0$. En particulier, pour tout réel x, $1+3\,\mathrm{e}^{x} \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. a. Le dénominateur de $g(x)$ s'annule si et seulement si $x = -\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}}$.

b. Pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{3}$,

$$g(x) = \frac{-2}{3} \times \frac{-\frac{3}{2}+x}{\frac{1}{3}+x} = -\frac{2}{3} \times \frac{x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{-\frac{11}{6}}{x+\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{11}{6}\right)}{x+\frac{1}{3}}$$

donc la forme réduite de g est : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\},\ g(x) = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{\frac{11}{9}}{x-\left(-\frac{1}{3}\right)}}$.

c. Comme $\beta = \frac{11}{9} > 0$, la fonction g est <u>strictement décroissante</u> sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

d. Comme g est décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0)$ i.e. $g(x) \leqslant 3$.

De plus, pour tout $x \geqslant 0$, $x+3 > 0$ donc $\dfrac{\frac{11}{9}}{x+3} > 0$ et ainsi $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{\frac{11}{9}}{x+3} > -\dfrac{2}{3}$ i.e. $g(x) > -\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $-\dfrac{2}{3} < g(x) \leqslant 3$ donc $\boxed{g \text{ est bornée par } -\dfrac{2}{3} \text{ et } 3}$.

3. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $0 < \mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b}$. Dès lors, comme la fonction g est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$, $g(\mathrm{e}^{a}) > g(\mathrm{e}^{b})$ i.e. $\dfrac{3-2\,\mathrm{e}^{a}}{1+3\,\mathrm{e}^{a}} > \dfrac{3-2\,\mathrm{e}^{b}}{1+3\,\mathrm{e}^{b}}$ soit $f(a) > f(b)$.
Ainsi, on conclut que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc, par le résultat de la question **4.**, $-\dfrac{2}{3} \leqslant g(\mathrm{e}^{x}) \leqslant 3$ i.e. $-\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{3-2\,\mathrm{e}^{x}}{1+3\,\mathrm{e}^{x}} \leqslant 3$ soit $-\dfrac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bornée par } -\dfrac{2}{3} \text{ et } 3}$.

5. Soit $y \in \left]-\dfrac{2}{3}\,;3\right[$. Alors, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = \frac{3-2\,\mathrm{e}^{x}}{1+3\,\mathrm{e}^{x}} \\
&\iff y(1+3\,\mathrm{e}^{x}) = 3-2\,\mathrm{e}^{x} \qquad (\text{car } 1+3\,\mathrm{e}^{x} \neq 0) \\
&\iff y + 3y\,\mathrm{e}^{x} = 3-2\,\mathrm{e}^{x} \\
&\iff 3y\,\mathrm{e}^{x} + 2\,\mathrm{e}^{x} = 3-y \\
&\iff \mathrm{e}^{x}(3y+2) = 3-y \\
&\iff \mathrm{e}^{x} = \frac{3-y}{3y+2} \qquad \left(\text{car } y \neq -\frac{2}{3} \text{ donc } 3y+2 \neq 0\right)
\end{aligned}$$

Or, comme $y < 3$, $3-y > 0$ et, comme $y > -\dfrac{2}{3}$, $3y+2 > 0$ donc $\dfrac{3-y}{3y+2} > 0$. Ainsi,

$$y = f(x) \iff \ln(e^{x}) = \ln\left(\frac{3-y}{3y+2}\right) \iff x = \ln\left(\frac{3-y}{3y+2}\right).$$

Ainsi, on conclut que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{2}{3}\,;3\right[$ et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{2}{3}\,;3\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{3-x}{3x+2}\right) \end{array}$$