

## Devoir à la maison n°5

À rendre le mercredi 10 janvier 2024

**Exercice 1.** Lors d'une rencontre internationale, des sportifs français et japonais s'affrontent. La délégation française compte  $a$  personnes et la délégation japonaise  $b$  personnes. Tous les sportifs logent dans le même hôtel et le matin tous se saluent les uns les autres. Si deux athlètes de la même nationalité se saluent, ils le font dans leur langue et si deux athlètes de nationalité différentes se saluent, ils le font en anglais.

1. Combien y a-t-il de salutations en français ? (Justifier.)
2. Combien y a-t-il de salutations en japonais ? (Justifier.)
3. Combien y a-t-il de salutations en anglais ? (Justifier.)
4. Dédurre des questions précédentes que  $\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + ab + \binom{b}{2}$ .
5. Démontrer la relation précédente par le calcul.

**Exercice 2.** On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{3 - 2e^x}{1 + 3e^x}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. On considère la fonction homographique  $g : x \mapsto \frac{3 - 2x}{1 + 3x}$ .
  - a. Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .
  - b. Écrire  $g$  sous forme réduite.
  - c. En déduire les variations de  $g$ .
  - d. En utilisant les questions précédentes, montrer que  $g$  est bornée sur  $[0; +\infty[$ .
3. En utilisant les variations de  $g$  et de la fonction exponentielle, montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. En utilisant la question 2., montrer que  $f$  est bornée par  $-\frac{2}{3}$  et par 3.
5. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\left] -\frac{2}{3}; 3 \right[$  et déterminer sa bijection réciproque.