Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 26 novembre 2025

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 6}{2u_n - 4}.$$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Formuler une conjecture concernant la suite (u_n) puis démontrer cette conjecture.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n - 1}{v_n + 1}.$$

a. Calculer v_1 et v_2.

b. La suite (v_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

d. On considère la suite (a_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $a_n = \dfrac{1}{v_n - 1}$.
Justifier que (a_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ puis montrer que (a_n) est arithmétique.

e. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de a_n en fonction de n puis de v_n en fonction de n.

3. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = \frac{7w_n + 6}{w_n + 8}.$$

a. Calculer w_1 et w_2.

b. La suite (w_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \neq 2$.

d. On considère la suite (b_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $b_n = \dfrac{w_n + 3}{w_n - 2}$.
Justifier que (b_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ puis montrer que (b_n) est géométrique.

e. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de b_n en fonction de n puis de w_n en fonction de n.