Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 29 novembre 2024

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \dfrac{5}{2 \times 3^{n-1}}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2 \times 5^n} + \dfrac{5}{2 \times 3^{n-1}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Calculer S_0, S_1 et S_2.

b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n en fonction de n.

Solution.

1. $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{1}{5}u_0 + \dfrac{1}{3^0} = \dfrac{1}{5} \times 8 + 1$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{13}{5}}$.

$u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1}{5}u_1 + \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{13}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{25} + \dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{64}{75}}$.

2. Comme $u_1 - u_0 = \dfrac{13}{5} - 8 = -\dfrac{27}{5}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{64}{75} - \dfrac{13}{5} = -\dfrac{131}{75}$, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

De même, comme $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{13}{5}}{8} = \dfrac{13}{5} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{40}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{64}{75}}{\frac{13}{5}} = \dfrac{64}{75} \times \dfrac{5}{13} = \dfrac{64}{195}$, $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{2 \times 3^{n+1-1}} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} - \frac{5}{2 \times 3^n} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{2 \times 3^n} - \frac{5}{2 \times 3^n} \\
&= \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{2 \times 3^n} = \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{2 \times 3^{n-1} \times 3} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} \\
&= \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{5}{2 \times 3^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n$.

On en déduit que $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{5}}$. De plus, le premier terme de (v_n) est

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{2 \times 3^{0-1}} = 8 - \frac{5}{2 \times 3^{-1}} = 8 - \frac{5 \times 3}{2} = \frac{16}{2} - \frac{15}{2}$$

i.e. $\boxed{v_0 = \frac{1}{2}}$.

b. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1^n}{5^n} = \frac{1}{2 \times 5^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{5}{2 \times 3^{n-1}}$ donc $u_n = v_n + \frac{5}{2 \times 3^{n-1}}$.

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2 \times 5^n} + \frac{5}{2 \times 3^{n-1}}}$.

4. a. $S_0 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$ donc $\boxed{S_0 = 8}$.

$S_1 = \sum_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = 8 + \frac{13}{5}$ donc $\boxed{S_1 = \frac{53}{5}}$.

$S_2 = \sum_{k=0}^{2} u_k = u_0 + u_1 + u_2 = 8 + \frac{13}{5} + \frac{64}{75}$ donc $\boxed{S_2 = \frac{859}{75}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2 \times 5^k} + \frac{5}{2 \times 3^{k-1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5^k} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

donc, par linéarité,

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} + \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k-1}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left[1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right] \\ &= \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{5 \times 5^n} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4 \times 5^n}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k-1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \times 3}{3^{k-1} \times 3} = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right] = \frac{9}{2}\left[1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right] = \frac{9}{2} - \frac{3^2}{2 \times 3^{n+1}} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{1}{3^{n+1-2}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{4 \times 5^n}\right] + \frac{5}{2}\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}\right] = \frac{5}{8} - \frac{1}{8 \times 5^n} + \frac{45}{4} - \frac{5}{4 \times 3^{n-1}}$$

soit finalement

$$\boxed{S_n = \frac{95}{8} - \frac{1}{8 \times 5^n} - \frac{5}{4 \times 3^{n-1}}}.$$

Exercice 2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(k) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $C_n + S_n = 2^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $C_n - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k)$.

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k) = 2^n \cos(n) \cos^n(1).$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de C_n et S_n en fonction de n.

Solution.

1. Par linéarité,

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(k) + \binom{n}{k} \sin^2(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\cos^2(k) + \sin^2(k)\right].$$

Or, pour tout entier k, $\cos^2(k) + \sin^2(k) = 1$ donc

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n$$

donc $\boxed{C_n + S_n = 2^n}$.

2. De même,

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(k) - \binom{n}{k} \sin^2(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\cos^2(k) - \sin^2(k)\right].$$

Or, pour tout entier k, $\cos^2(k) - \sin^2(k) = \cos(2k)$ donc $\boxed{C_n - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k)}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes, $C_n + S_n = 2^n$ et $C_n - S_n = 2^n \cos(n) \cos^n(1)$. Dès lors, $C_n = 2^n \cos(n) \cos^n(1) + S_n$ donc $(2^n \cos(n) \cos^n(1) + S_n) + S_n = 2^n$ i.e. $2^n \cos(n) \cos^n(1) + 2S_n = 2^n$ et ainsi $2S_n = 2^n - 2^n \cos(n) \cos^n(1) = 2^n(1 - \cos(n) \cos^n(1))$. On en déduit que $S_n = \dfrac{1}{2} 2^n (1 - \cos(n) \cos^n(1))$ soit

$$\boxed{S_n = 2^{n-1}(1 - \cos(n) \cos^n(-1))}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} C_n &= 2^n - S_n = 2^n - 2^{n-1}(1 - \cos(n) \cos^n(-1)) = 2^{n-1} \times 2 - 2^{n-1}(1 - \cos(n) \cos^n(-1)) \\ &= 2^{n-1} \left[2 - (1 - \cos(n) \cos^n(-1))\right] = 2^{n-1} \left[2 - 1 + \cos(n) \cos^n(-1)\right] \end{aligned}$$

soit, finalement,

$$\boxed{C_n = 2^{n-1}(1 + \cos(n) \cos^n(-1))}.$$