Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 24 novembre 2023

Pour tout réel x, on pose $P_0(x) = 1$ et, pour tout entier naturel non nul,

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Ainsi, pour tout réel x, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x(x-1)$ et $P_3(x) = x(x-1)(x-2)$.

1. Calculer $P_3(\frac{1}{2})$ et $P_4(\frac{3}{2})$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n(0)$.

3. Soit q et m deux entiers naturels. Montrer que $\binom{m}{q} = \dfrac{P_q(m)}{q!}$. (On distinguera les cas $q \leqslant m$ et $q > m$.)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P_n(-1)$ en fonction de $n!$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que, pour tout réel x,

$$P_{n+1}(x+1) = (x+1) \times P_n(x) \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) \times (x-n).$$

b. En déduire, pour tout réel x,

$$(n+1)P_n(x) = P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x).$$

c. Soit $d \in \mathbb{N}$. Utiliser le résultat précédent pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \frac{1}{d+1} P_{d+1}(n+1).$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in [\![0, n]\!]$.

a. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{d}$.

b. Utiliser le résultat des questions précédentes pour montrer que

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \binom{n+1}{d+1}.$$

Solution.

1. Par définition, $P_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) \times (\frac{1}{2}-2) = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2})$ donc $\boxed{P_3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}}$.

De même, $P_4(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \times (\frac{3}{2}-1) \times (\frac{3}{2}-2) \times (\frac{3}{2}-3) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2})$ donc $\boxed{P_4(\frac{3}{2}) = \frac{9}{16}}$.

2. Comme $n \geqslant 1$, $P_n(0) = 0 \times (0-1) \times (0-2) \times \cdots \times (0-n+1)$ donc $\boxed{P_n(0) = 0}$.

3. Distinguons deux cas. Si $q \leqslant m$ alors, par définition,

$$\binom{m}{q} = \frac{m!}{q!(m-q)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-q+1)}{q!} = \frac{P_q(m)}{q!}.$$

Si $q > m$, alors $P_q(m) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-q+1) = 0$ car l'un des facteurs du produit est $q-q=0$. Or, dans ce cas, $\binom{m}{q} = 0$ donc $\binom{m}{q} = \frac{P_q(m)}{q!}$.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{\binom{m}{q} = \frac{P_q(m)}{m!}}$.

4. Par définition,

$$\begin{aligned} P_n(-1) &= (-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n+1) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n) \\ &= (-1) \times 1 \times (-1) \times 2 \times (-1) \times 3 \times \cdots \times (-1) \times n \\ &= (-1)^n \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \end{aligned}$$

donc $\boxed{P_n(-1) = (-1)^n \times n!}$.

5. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x+1) &= (x+1)(x+1-1)(x+1-2)\cdots(x+1-(n+1)+1) \\ &= (x+1)x(x-1)\cdots(x-n+1) \\ &= (x+1) \times P_n(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n+1)+1) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n) \\ &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)(x-n) \\ &= P_n(x) \times (x-n) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{P_{n+1}(x+1) = (x+1)P_n(x) \text{ et } P_{n+1}(x) = P_n(x) \times (x-n)}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) &= (x+1)P_n(x) - (x-n)P_n(x) \\ &= (x+1-(x-n))P_n(x) \\ &= (x+1-x+n)P_n(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x)}$.

c. On déduit de la question précédente que

$$sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d+1} \left[P_{d+1}(k+1) - P_{d+1}(k)\right]$$

donc, par linéarité,

$$\sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \frac{1}{d+1}\sum_{k=0}^{n}\left[P_{d+1}(k+1) - P_{d+1}(k)\right].$$

On reconnaît alors une somme téléscopique donc

$$\sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \frac{1}{d+1}\left[P_{d+1}(n+1) - P_{d+1}(0)\right].$$

Or, d'après la question **2.**, $P_{d+1}(0) = 0$ (car $d+1 \geqslant 1$) donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \frac{1}{d+1}P_{d+1}(n+1)}.$$

6. a. Pour tout entier $k \in [\![0, d-1]\!]$, $\dbinom{k}{d} = 0$ car $d > k$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=d}^{n}\binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{d}}$.

b. On déduit des questions **3.** et **5.c** que

$$\sum_{k=d}^{n}\binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_d(k)}{d!} = \frac{1}{d!}\sum_{k=0}^{n}P_d(k) = \frac{1}{d!}\times\frac{1}{d+1}P_{d+1}(n+1) = \frac{P_{d+1}(n+1)}{(d+1)!}$$

donc, d'après la question **3.**,

$$\boxed{\sum_{k=d}^{n}\binom{k}{d} = \binom{n+1}{d+1}}.$$