Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 24 novembre 2023

Pour tout réel x, on pose $P_0(x) = 1$ et, pour tout entier naturel non nul,

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Ainsi, pour tout réel x, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x(x-1)$ et $P_3(x) = x(x-1)(x-2)$.

1. Calculer $P_3(\frac{1}{2})$ et $P_4(\frac{3}{2})$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n(0)$.

3. Soit q et m deux entiers naturels. Montrer que $\dbinom{m}{q} = \dfrac{P_q(m)}{q!}$. (On distinguera les cas $q \leqslant m$ et $q > m$.)

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P_n(-1)$ en fonction de $n!$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que, pour tout réel x,

$$P_{n+1}(x+1) = (x+1) \times P_n(x) \qquad \text{et} \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) \times (x-n).$$

b. En déduire, pour tout réel x,

$$(n+1)P_n(x) = P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x).$$

c. Soit $d \in \mathbb{N}$. Utiliser le résultat précédent pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} P_d(k) = \frac{1}{d+1} P_{d+1}(n+1).$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in [\![0, n]\!]$.

a. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{d}$.

b. Utiliser le résultat des questions précédentes pour montrer que

$$\sum_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \binom{n+1}{d+1}.$$