Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 4 novembre 2026

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2+2x+5} \end{array}$$

a. Justifier que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.

b. Calculer $f(-1)$ et $f(3)$.

c. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
- P_1 : « Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k) \in \mathbb{Z}$ »
- P_2 : « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(k) \in \mathbb{Z}$ ».

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 2$.

e. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & [-1\,;+\infty[& \longrightarrow &]0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2+2x+5} \end{array}$$

Soit $b \in]0\,;1]$.

a. Soit $a \in [-1\,;+\infty[$. Montrer que a est un antécédent de b par g si et seulement si a est une solution de l'équation (E_b) d'inconnue x suivante :

$$(E_b) : bx^2 + 2bx + 5b - 4 = 0.$$

b. Justifier que (E_b) est une équation du second degré.

c. On note Δ_b le discriminant du trinôme $bx^2+2bx+5b-4$. Montrer que $\Delta_b = 16b(1-b)$.

d. Justifier que $\Delta_b \geqslant 0$.

e. On suppose que $b = 1$. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$.

f. On suppose que $b \in]0\,;1[$. Déterminer l'ensemble de solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$.

g. Déduire des questions précédentes que g réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans $]0\,;1]$ et donner une expression de sa bijection réciproque.

Solution.

1. a. Le discriminant de x^2+2x+5 est $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 5 = -16 < 0$ donc, pour tout réel x, $x^2+2x+5 \neq 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

b. $f(-1) = \dfrac{4}{(-1)^2+2\times(-1)+5} = \dfrac{4}{4}$ donc $\boxed{f(-1)=1}$ et $f(3) = \dfrac{4}{3^2+2\times 3+5} = \dfrac{4}{20}$ donc $\boxed{f(3) = \dfrac{1}{5}}$.

c. La proposition P_1 est fausse puisque $3\in\mathbb{Z}$ mais $f(3) = \dfrac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ et la proposition P_2 est vraie car $-1\in\mathbb{Z}$ et $f(-1) = 1 \in \mathbb{Z}$.

d. Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{4}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \iff (x^2+2x+5)\times 1 = 4\times 2 \iff x^2+2x-3 = 0$$

Le discriminant de x^2+2x-3 est $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$ donc ce trinôme a 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1.$$

On conclut donc que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ est } \{-3\,;1\}}$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{4}{x^2+2x+5} = 2 \iff (x^2+2x+5)\times 2 = 4\times 1 \\ &\iff 2x^2+4x+6 = 0 \iff x^2+2x+3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de x^2+2x+3 est $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 3 = -8 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racines réelles. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } f(x) = 2 \text{ est } \varnothing}$.

e. La fonction f n'est pas injective car $\dfrac{1}{2}$ possède deux antécédents par f. De même, f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par f.

2. a. Par définition, a est un antécédent de b par g si et seulement si $g(a) = b$. Or,

$$g(a) = b \iff \frac{4}{a^2+2b+5} = b \iff b(a^2+2a+5) = 4 \iff ba^2+2ba+5b-4 = 0.$$

Ainsi, $\boxed{a \text{ est un antécédent de } b \text{ si et seulement si } a \text{ est une solution de } (E_b)}$.

b. Comme $b\neq 0$, (E_b) est bien une équation du second degré.

c. Le discriminant du trinôme $bx^2+2bx+5b-4$ est

$$\begin{aligned} \Delta_b &= (2b)^2 - 4\times b\times(5b-4) = 4b^2 - 4b(5b-4) = 4b(b-(5b-4)) \\ &= 4b(-4b+4) = 4b\times 4(b-1) \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\Delta_b = 16b(1-b)}$.

d. Comme $b\in\,]0\,;1]$, $b>0$ et $b\leqslant 1$ donc $1-b\geqslant 0$. Ainsi, Δ_b est un produit de trois nombres positifs donc $\boxed{\Delta_b \geqslant 0}$.

e. Si $b=1$ alors $\Delta_b = 0$ donc (E_b) a une unique solution réelle qui est donnée par

$$x_0 = -\frac{2b}{2b} = -1.$$

On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_b) \text{ est } \{-1\}}$.

f. Si $b \in]0\,;1[$ alors $\Delta_b > 0$ donc (E_b) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2b - \sqrt{16b(1-b)}}{2b} = \frac{-2b - 4\sqrt{b(1-b)}}{2b} = -1 - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}$$

et

$$x_2 = \frac{-2b + \sqrt{16b(1-b)}}{2b} = \frac{-2b + 4\sqrt{b(1-b)}}{2b} = -1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_b) \text{ est } \left\{ -1 - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}\,;-1 - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b} \right\}}$.

g. Si $b = 0$, l'unique antécédent de b par g est -1.

Si $b \in]0\,;1[$, les solutions de (E_b) sont $-1 - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}$ et $-1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}$. Or, comme $b > 0$, $\frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b} > 0$ donc $-\frac{b + 2\sqrt{b(1-b)}}{b} < -1$ et $-1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b} > -1$.

Ainsi, l'unique solution de (E_b) appartenant à $[-1\,;+\infty[$ est $-1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}$. On en déduit donc que b admet un unique antécédent par g donné par $-1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}$.

De plus, on peut remarquer que cette formule est encore valable pour $b = 1$ car $-1 + \frac{2\sqrt{1(1-1)}}{1} = -1$.

On conclut que g réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans $]0\,;1]$ et sa bijection réciproque est

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} g: &]0\,;1] & \longrightarrow & [-1\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & -1 + \dfrac{2\sqrt{x(1-x)}}{x} \end{array}}.$$