Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 4 novembre 2026

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2+2x+5} \end{array}$$

a. Justifier que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.

b. Calculer $f(-1)$ et $f(3)$.

c. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
- P_1 : « Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k) \in \mathbb{Z}$ »
- P_2 : « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(k) \in \mathbb{Z}$ ».

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 2$.

e. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & [-1\,;+\infty[& \longrightarrow &]0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2+2x+5} \end{array}$$

Soit $b \in]0\,;1]$.

a. Soit $a \in [-1\,;+\infty[$. Montrer que a est un antécédent de b par g si et seulement si a est une solution de l'équation (E_b) d'inconnue x suivante :

$$(E_b) : bx^2 + 2bx + 5b - 4 = 0.$$

b. Justifier que (E_b) est une équation du second degré.

c. On note Δ_b le discriminant du trinôme $bx^2+2bx+5b-4$. Montrer que $\Delta_b = 16b(1-b)$.

d. Justifier que $\Delta_b \geqslant 0$.

e. On suppose que $b = 1$. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$.

f. On suppose que $b \in]0\,;1[$. Montrer que l'ensemble de solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ -1 - \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b}\,; -1 + \frac{2\sqrt{b(1-b)}}{b} \right\}.$$

g. Déduire des questions précédentes que g réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans $]0\,;1]$ et donner une expression de sa bijection réciproque.