Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 5 novembre 2025

1. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-2x+5} \end{array}$$

a. Justifier que f est bien définie pour tout réel x.

b. Calculer $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$.

c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f(3)$ est irrationnel.

d. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
- P_1 : « Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) \in \mathbb{Q}$ »
- P_2 : « il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) \in \mathbb{Q}$ ».

e. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. On considère la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & [2\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-2x+5} \end{array}$$

On admet que cette fonction est bien définie.
Soit $b \in [2\,;+\infty[$.

a. Soit $a \in [1\,;+\infty[$. Montrer que, si a est un antécédent de b par g, alors a est une solution de l'équation (E_b) d'inconnue x suivante :

$$(E_b) : x^2 - 2x + 5 - b^2 = 0.$$

b. Montrer que le discriminant Δ_b du trinôme $x^2 - 2x + 5 - b^2$ est positif ou nul.

c. Pour quelle(s) valeur(s) de b a-t-on $\Delta_b = 0$. Dans ce cas, déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$? Toujours dans ce cas, combien b a-t-il d'antécédent(s) par g ?

d. Pour quelle(s) valeur(s) de b a-t-on $\Delta_b > 0$. Dans ce cas, déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$? Toujours dans ce cas, combien b a-t-il d'antécédent(s) par g ?

e. Déduire des questions précédentes que g réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $[2\,;+\infty[$ et donner une expression de sa bijection réciproque.

Solution.

1. a. Le discriminant du trinôme x^2-2x+5 est $\Delta = (-2)^2-4\times1\times5 = -16 < 0$ donc, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x, $x^2-2x+5 > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

b. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2\times(-1)+5} = \sqrt{8}$ donc $\boxed{f(-1) = 2\sqrt{2}}$, $f(1) = \sqrt{1^2-2\times1+5} = \sqrt{4} = 2$ donc $\boxed{f(1) = 2}$ et $f(3) = \sqrt{3^2-2\times3+5} = \sqrt{8}$ donc $\boxed{f(3) = 2\sqrt{2}}$.

c. Supposons, par l'absurde, que $f(3)$ soit rationnel. Alors, il existe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(3) = \frac{a}{b}$ i.e. $2\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Dès lors, $\sqrt{2} = \frac{a}{2b}$ est un rationnel car $a \in \mathbb{Z}$ et $2b \in \mathbb{N}^*$. C'est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, $\boxed{f(3) \text{ est irrationnel}}$.

d. La question précédente donne un contre-exemple à la proposition P_1 donc $\boxed{P_1 \text{ est fausse}}$. En revanche, $1 \in \mathbb{Q}$ et $f(1) = 2 \in \mathbb{Q}$ donc l'exemple témoin $x = 1$ montre que $\boxed{P_2 \text{ est vraie}}$.

e. On a vu que $f(-1) = f(3)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$. De plus, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ (car, par définition, la racine carrée d'un réel positif est positif) donc, par exemple, -2 n'est pas d'antécédent par f. Ainsi, $\boxed{g \text{ n'est pas surjective}}$.

2. a. Supposons que a est un antécédent de b par g. Alors, $g(a) = b$ donc $\sqrt{a^2-2a+5} = b$ et ainsi $\sqrt{a^2-2a+5}^2 = b^2$. On en déduit que $a^2-2a+5 = b^2$ donc $a^2-2b+5-b^2 = 0$. Ainsi, a est bien solution de (E_b). On conclut que si $\underline{a \text{ est un antécédent de } b \text{ par } g}$ $\underline{\text{alors } a \text{ est une solution de } (E_b)}$.

b. Par définition,

$$\begin{aligned}\Delta_b &= (-2)^2 - 4\times1\times(5-b^2) = 4 - 4(5-b^2) = 4[1-(5-b^2)] \\ &= 4(1-5+b^2) = 4(b^2-4) = 4(b-2)(b+2).\end{aligned}$$

Or, $b \geqslant 2$ donc $b-2 \geqslant 0$ et $b+2 > 0$ donc $\boxed{\Delta_b \geqslant 2}$.

c. Comme $\Delta_b = 4(b-2)(b+2)$ et $4(b+2) > 0$ car $b \geqslant 2$, $\Delta_b = 0$ si et seulement si $b-2 = 0$ i.e. $b = 2$. Ainsi, $\boxed{\Delta_b = 0 \text{ si et seulement si } b = 2}$.
Dans ce cas, l'équation (E_b) possède une unique solution qui est

$$x_0 = -\frac{-2}{2\times1} = 1$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_b) \text{ est } \{1\}}$.
On en déduit que le seul antécédent possible de 2 est 1 et on a vu qu'effectivement $f(1) = 2$ donc $\boxed{\text{l'unique antécédent de 2 par } g \text{ est } 1}$.

d. Comme $\Delta_b \geqslant 0$ et comme $\Delta_b = 0$ si et seulement si $b = 2$, on conclut que $\Delta_b > 0$ si et seulement si $b > 2$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs de } b \text{ telles que } \Delta_b > 0 \text{ est }]0\,;+\infty[}$.
Dans ce cas, l'équation (E_b) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{4(b^2-4)}}{2\times1} = \frac{2-2\sqrt{b^2-4}}{2} = 1-\sqrt{b^2-4}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{4(b^2-4)}}{2\times1} = \frac{2+2\sqrt{b^2-4}}{2} = 1+\sqrt{b^2-4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_b) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } \left\{1-\sqrt{b^2-4}\,;1+\sqrt{b^2-4}\right\}}$.

Si a est un antécédent de b par g, on a donc $a = 1-\sqrt{b^2-4}$ ou $a = 1+\sqrt{b^2-4}$. Cependant, comme $b > 2$, $b^2 > 4$ donc $b^2-4 > 0$ et ainsi $\sqrt{b^2-4} > 0$. Il s'ensuit que

$1 - \sqrt{b^2-4} < 1$ donc ce nombre ne peut pas être un antécédent de b par g puisque g est définie sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi, la seule valeur possible pour a est $1+\sqrt{b^2-4}$. On remarque que $1+\sqrt{b^2-4} \geqslant 1$. De plus,

$$\begin{aligned} g(1+\sqrt{b^2-4}) &= \sqrt{(1+\sqrt{b^2-4})^2 - 2(1+\sqrt{b^2-4}) + 5} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b^2-4}^2 - 2 - 2\sqrt{b^2-4} + 5} \\ &= \sqrt{1 + (b^2-4) + 4} = \sqrt{b^2} \end{aligned}$$

et, comme $b \geqslant 0$, $\sqrt{b^2} = b$ donc $g(1+\sqrt{b^2-4}) = b$. Ainsi, l'unique antécédent de b par g est $1+\sqrt{b^2-4}$.

e. Ainsi, dans tous les cas, $b \in [2\,;+\infty[$ admet un unique antécédent par g qui est vaut 1 si $b=2$ et $1+\sqrt{b^2-4}$ si $b>2$. Ainsi, $\boxed{g \text{ réalise une bijection de } [1\,;+\infty[\text{ dans } [2\,;+\infty[}$. On peut remarquer que $1+\sqrt{2^2-4} = 1+\sqrt{0} = 1$ donc l'expression $1+\sqrt{b^2-4}$ donne l'unique antécédent de b pour tout $b \geqslant 2$. On conclut que la bijection réciproque de g est

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [2\,;+\infty[& \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & 1+\sqrt{x^2-4} \end{array}}.$$