Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 5 novembre 2025

1. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - 2x + 5} \end{array}$$

a. Justifier que f est bien définie pour tout réel x.

b. Calculer $f(-1)$, $f(1)$ et $f(3)$.

c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f(3)$ est irrationnel.

d. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.

- P_1 : « Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) \in \mathbb{Q}$ »
- P_2 : « il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) \in \mathbb{Q}$ ».

e. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & [2\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - 2x + 5} \end{array}$$

On admet que cette fonction est bien définie.
Soit $b \in [2\,;+\infty[$.

a. Soit $a \in [1\,;+\infty[$. Montrer que, si a est un antécédent de b par g, alors a est une solution de l'équation (E_b) d'inconnue x suivante :

$$(E_b) : x^2 - 2x + 5 - b^2 = 0.$$

b. Montrer que le discriminant Δ_b du trinôme $x^2 - 2x + 5 - b^2$ est positif ou nul.

c. Pour quelle(s) valeur(s) de b a-t-on $\Delta_b = 0$. Dans ce cas, déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$? Toujours dans ce cas, combien b a-t-il d'antécédent(s) par g ?

d. Pour quelle(s) valeur(s) de b a-t-on $\Delta_b > 0$. Dans ce cas, déterminer l'ensemble des solutions de (E_b) dans $\mathbb{R}$? Toujours dans ce cas, combien b a-t-il d'antécédent(s) par g ?

e. Déduire des questions précédentes que g réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $[2\,;+\infty[$ et donner une expression de sa bijection réciproque.