Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 6 novembre 2023

1. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$

a. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-2)$.

b. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
P_1 : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{N}$ »
P_2 : « il existe $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{N}$ ».

c. Justifier que $\operatorname{Im} f \subset \,]-1\,;1[$.
La fonction f est-elle surjective ?

d. Soit a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$.

i. Justifier que a et b ont le même signe.

ii. En utilisant un raisonnement par disjonction de cas, montrer que $a = b$.

iii. Que déduit-on de la question précédente concernant la fonction f.

2. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1\,;1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$

a. Soit $y \in \,]-1\,;1[$. Montrer que chercher les antécédents de y par g revient à résoudre l'équation suivante d'inconnue x :

$$(E_y) : x = y(1+|x|).$$

b. Soit $y \in [0\,;1[$.
Justifier que (E_y) n'a pas de solution sur $]-\infty\,;0[$ puis résoudre (E_y) sur $[0\,;+\infty[$.
Que peut-on en déduire concernant les antécédents de y par g ?

c. Soit $y \in \,]-1\,;0[$. En raisonnant comme précédemment, démontrer que y possède un unique antécédent par g.

d. Conclure que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$ et déterminer explicitement sa bijection réciproque g^{-1}.