Corrigé du devoir à la maison n°3

1. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x+2} \end{array}$$

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
P_1 : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{N}$ »
P_2 : « Pour tout rationnel $r \geqslant 0$, $f(r) \in \mathbb{Q}$ ».

c. Justifier que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_+$.
La fonction f est-elle surjective ?

d. Déterminer les antécédents de 1 par f.
La fonction f est-elle injective ?

2. On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x+2} \end{array}$$

Soit a un réel positif ou nul.

a. Montrer que chercher les antécédents de a par g revient à résoudre l'équation

$$(E_a) : x^2 - ax - 2a = 0.$$

b. Quel est l'ensemble des solutions de (E_a) si $a = 0$?
Que peut-on en déduire concernant les antécédents de 0 par g ?

c. On suppose $a > 0$.
Montrer que (E_a) admet exactement deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 0 < x_2$.
Que peut-on en déduire concernant les antécédents de a par g ?

d. Conclure que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer explicitement sa bijection réciproque g^{-1}.

Solution.

1. a. $f(0) = \dfrac{0^2}{0+2}$ donc $\boxed{f(0) = 0}$ et $f(1) = \dfrac{1^2}{1+2}$ donc $\boxed{f(1) = \dfrac{1}{3}}$.

b. D'après la question précédente, $f(1) \notin \mathbb{N}$ alors que $1 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{P_1 \text{ est fausse}}$.

Soit r un rationnel positif. Alors, il existe deux entiers naturels a et b tels que $r = \dfrac{a}{b}$ donc

$$f(r) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b}+2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a+2b}{b}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{b}{a+2b} = \frac{a^2 b}{a+2b}.$$

Or, comme a et b sont entiers, $a^2 b$ et $a + 2b$ sont également entiers donc $f(r) \in \mathbb{Q}$.
Ainsi, $\boxed{P_2 \text{ est vraie}}$.

c. Soit $x \in\,]-2\,;+\infty[$. Alors, $x > -2$ donc $x + 2 > 0$ et $x^2 \geqslant 0$ donc, par quotient, $\dfrac{x^2}{x+2} \geqslant 0$ i.e. $f(x) \in \mathbb{R}_+$. On a donc montré que $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_+}$.
Comme $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

d. Déterminer les antécédents de 1 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 1$ dans $]-2\,;+\infty[$. Or, pour tout réel $x > -2$,

$$f(x) = 1 \iff \frac{x^2}{x+2} = 1 \underset{x\neq -2}{\iff} x^2 = x+2 \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Comme ces deux solutions appartiennent à $]-2\,;+\infty[$, on conclut de ce qui précède que $\boxed{\text{les antécédents de 1 par } f \text{ sont } -1 \text{ et } 2}$.

Étant donné que 1 possède plusieurs antécédents par f, $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

2. a. Chercher les antécédents de a par g revient à résoudre l'équation l'équation $g(x) = a$. Or, pour tout réel x positif,

$$g(x) = a \iff \frac{x^2}{x+2} = a \underset{x\neq -2}{\iff} x^2 = a(x+2) \iff x^2 - a(x+2) = 0 \iff x^2 - ax - 2a.$$

Ainsi, $\boxed{\text{chercher les antécédents de } a \text{ par } g \text{ revient à résoudre dans } \mathbb{R}_+ \text{ l'équation } (E_a)}$.

b. Supposons que $a = 0$. Alors, (E_a) s'écrit $x^2 = 0$ dont l'unique solution est $x = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est } \{0\}}$.

On en déduit que $\boxed{\text{l'unique antécédent de 0 par } g \text{ est } 0}$.

c. Le discriminant de $x^2 - ax - 2a$ est $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-2a) = a^2 + 8a$. Comme $a > 0$, $\Delta > 0$ donc (E_a) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-a) - \sqrt{a^2+8a}}{2 \times 1} = \frac{a - \sqrt{a^2+8a}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-a) + \sqrt{a^2+8a}}{2 \times 1} = \frac{a + \sqrt{a^2+8a}}{2}.$$

Comme $a > 0$, on a clairement $x_2 > 0$. De plus, toujours par strictement positivité de a, $a^2 + 8a > a^2$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{a^2+8a} > \sqrt{a^2} = |a| = a$ (car $a > 0$). Dès lors, $a - \sqrt{a^2+8a} < 0$ donc $x_1 < 0$.

Ainsi, $\boxed{(E_a) \text{ admet exactement deux solutions } x_1 \text{ et } x_2 \text{ telles que } x_1 < 0 < x_2}$.

Comme les antécédents de a par g sont les solutions positives de $g(x) = a$, on conclut que $\boxed{a \text{ possède un unique antécédent par } g \text{ : il s'agit de } x_2}$.

d. Comme en question **1.c.**, $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{R}_+$. De plus, il résulte des questions précédentes que, quel que soit $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(x) = a$. On en déduit que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. De plus, la question **2.c.** montre que, pour tout $x > 0$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+8x}}{2}$ et la question **2.b.** montre que $g^{-1}(0) = 0$. Or, $\dfrac{0 + \sqrt{0^2 + 8 \times 0}}{2} = 0$ donc, finalement, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+8x}}{2}$.

On conclut donc que

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+\sqrt{x^2+8x}}{2} \end{array}}$$