

Devoir à la maison n°3

À rendre le mercredi 8 novembre 2023

1. On considère la fonction

$$f :]-2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2}{x+2}$$

- a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
- b. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera ses réponses.
 P_1 : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{N}$ »
 P_2 : « Pour tout rationnel $r \geq 0$, $f(r) \in \mathbb{Q}$ ».
- c. Justifier que $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_+$.
 La fonction f est-elle surjective ?
- d. Déterminer les antécédents de 1 par f .
 La fonction f est-elle injective ?

2. On considère la fonction

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto \frac{x^2}{x+2}$$

Soit a un réel positif ou nul.

- a. Montrer que chercher les antécédents de a par g revient à résoudre l'équation

$$(E_a) : x^2 - ax - 2a = 0.$$

- b. Quel est l'ensemble des solutions de (E_a) si $a = 0$?
 Que peut-on en déduire concernant les antécédents de 0 par g ?
- c. On suppose $a > 0$.
 Montrer que (E_a) admet exactement deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 0 < x_2$.
 Que peut-on en déduire concernant les antécédents de a par g ?
- d. Conclure que la fonction g réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et déterminer explicitement sa bijection réciproque g^{-1} .