Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 14 octobre 2026

Soit a, b, c et d des réels non nuls. Le but de ce qui suit est de donner trois démonstrations différentes de l'inégalité suivante :

$$(I) \ : \ (ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

I. Première méthode

1. Montrer que $(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2 = (ad-bc)^2$.

2. Conclure.

II. Seconde méthode

On considère le trinôme du second degré

$$P(x) = (a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)x + b^2 + d^2.$$

1. Pourquoi peut-on affirmer que $P(x)$ est bien un trinôme du second degré ?

2. Montrer que le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 4((ab+cd)^2 - (a^2+c^2)(b^2+d^2))$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $P(x) = (ax+b)^2 + (cx+d)^2$.

4. Que peut-on déduire de la question précédente concernant le signe de $P(x)$ en fonction du réel x ?

5. Que peut-on déduire de la question précédente concernant le signe de Δ ?

6. Conclure.

III. Troisième méthode

1. Soit x et y deux réels. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

2. En appliquant ce qui précède avec $x = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}$ et $y = \dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}$, montrer que

$$\frac{|ab|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}\right).$$

3. Démontrer, de la même façon, que

$$\frac{|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2}\right).$$

4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\frac{|ab|+|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant 1.$$

5. En utilisant l'inégalité triangulaire, en déduire que

$$|ab+cd| \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}.$$

6. Soit x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Montrer que $x^2 \leqslant y^2$.

7. Conclure.

Solution.

I. Première méthode

1. En développant le membre de gauche, il vient

$$\begin{aligned}(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2 &= a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2-((ab)^2+2(ab)(cd)+(cd)^2)\\ &= (ab)^2+(ad)^2+(bc)^2+(cd)^2-(ab)^2-2abcd-(cd)^2\\ &= (ad)^2-2abcd+(bc)^2\\ &= (ad)^2-2(ad)(bc)+(bc)^2\end{aligned}$$

donc, en reconnaissant une identité remarquable,

$$\boxed{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=(ad-bc)^2}.$$

2. Comme le carré d'un réel est positif, $(ad-bc)^2 \geqslant 0$ donc $(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2 \geqslant 0$ et donc $\boxed{(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geqslant (ab+cd)^2}$.

II. Seconde méthode

1. Comme a et c sont non nuls, $a^2+c^2>0$ donc $a^2+c^2 \neq 0$ et donc $P(x)$ est bien un trinôme du seconde degré.

2. Le discriminant de $P(x)$ est

$$\Delta = (2(ab+cd))^2-4(a^2+c^2)(b^2+d^2) = 4(ab+cd)^2-4(a+c^2)(b^2+d^2)$$

donc $\boxed{\Delta = 4((ab+cd)^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2))}$.

3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(ax+b)^2+(cx+d)^2 &= (ax)^2+2(ax)b+b^2+(cx)^2+2(cx)d+d^2\\ &= a^2x^2+2(ab)x+b^2+c^2x^2+2(cd)x+d^2\\ &= (a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)x+b^2+d^2\end{aligned}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ (ax+b)^2+(cx+d)^2=P(x)}$.

4. Pour tout réel x, $(ax+b)^2$ et $(cx+d)^2$ sont positifs donc, par somme de nombres positifs, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ P(x) \geqslant 0}$.

5. Ainsi, le trinôme $P(x)$ est de signe constant donc, par propriété, $\boxed{\Delta \leqslant 0}$.

6. On déduit des questions **2.** et **4.** que $4((ab+cd)^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2)) \leqslant 0$ donc, comme $4>0$, $(ab+cd)^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2) \leqslant 0$ et ainsi $\boxed{(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2)}$.

III. Troisième méthode

1. On remarque que

$$\frac{x^2+y^2}{2}-xy = \frac{x^2+y^2-2xy}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$$

donc $\boxed{xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}}$.

2. En appliquant ce qui précède avec $x = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}$ et $y = \dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}$, il vient

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}} \times \frac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}\right)^2\right).$$

Or, par le propriété de la valeur absolue et de la racine carrée,

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}} \times \frac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}} = \frac{|a|\,|b|}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}} = \frac{|ab|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}}$$

et

$$\left(\frac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}\right)^2 + \left(\frac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}\right)^2 = \frac{|a|^2}{\sqrt{a^2+c^2}^2} + \frac{|b|^2}{\sqrt{b^2+d^2}^2} = \frac{|a^2|}{a^2+c^2} + \frac{|b^2|}{b^2+d^2} = \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}$$

car a^2 et b^2 sont positifs.
On conclut donc que

$$\boxed{\frac{|ab|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}\right)}$$

3. De même, en appliquant le résultat de la question **1.** avec $x = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}$ et $y = \dfrac{|d|}{\sqrt{b^2+d^2}}$, il vient

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}} \times \frac{|d|}{\sqrt{b^2+d^2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{|d|}{\sqrt{b^2+d^2}}\right)^2\right)$$

et, pour les mêmes raisons, on aboutit à

$$\boxed{\frac{|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2}\right)}.$$

4. En additionnant termes à termes ces deux dernières inégalités, on obtient

$$\frac{|ab|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} + \frac{|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a^2+c^2} + \frac{d}{b^2+d^2}\right)$$

i.e.

$$\frac{|ab|+|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2}\right).$$

Or,

$$\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2} = \frac{a^2+c^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2+d^2}{b^2+d^2} = 1+1 = 2$$

donc

$$\frac{|ab|+|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

et, en multipliant par $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} \geqslant 0$, on conclut que

$$\boxed{|ab|+|cd| \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}}.$$

5. D'après l'inégalité triangulaire, $|ab+cd| \leqslant |ab|+|cd|$ et, d'après la question précédente, $|ab|+|cd| \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$ donc

$$\boxed{|ab+cd| \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}}.$$

6. Comme x et y sont positifs, $y+x \geqslant 0$. De plus, comme $x \leqslant y$, $y-x \leqslant 0$ donc, par produit, $(y-x)(y+x) \leqslant 0$ i.e. $y^2-x^2 \leqslant 0$. Ceci permet de conclut que $\boxed{x^2 \leqslant y^2}$.

7. Comme $|ab+cd|$ et $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$ sont deux nombres positifs, on déduit des deux questions précédentes que $|ab+cd|^2 \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}^2$ c'est-à-dire $|(ab+cd)^2| \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2)$ soit, comme $(ab+cd)^2 \geqslant 0$, $\boxed{(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2)}$.