# Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 14 octobre 2026

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels non nuls. Le but de ce qui suit est de donner trois démonstrations différentes de l'inégalité suivante :

$$(I) \ : \ (ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

## I. Première méthode

**1.** Montrer que $(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2 = (ad-bc)^2$.

**2.** Conclure.

## II. Seconde méthode

On considère le trinôme du second degré

$$P(x) = (a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)x + b^2 + d^2.$$

**1.** Pourquoi peut-on affirmer que $P(x)$ est bien un trinôme du second degré ?

**2.** Montrer que le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 4((ab+cd)^2 - (a^2+c^2)(b^2+d^2))$.

**3.** Montrer que, pour tout réel $x$, $P(x) = (ax+b)^2 + (cx+d)^2$.

**4.** Que peut-on déduire de la question précédente concernant le signe de $P(x)$ en fonction du réel $x$ ?

**5.** Que peut-on déduire de la question précédente concernant le signe de $\Delta$ ?

**6.** Conclure.

## III. Troisième méthode

**1.** Soit $x$ et $y$ deux réels. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

**2.** En appliquant ce qui précède avec $x = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}$ et $y = \dfrac{|b|}{\sqrt{b^2+d^2}}$, montrer que

$$\frac{|ab|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}\right).$$

**3.** Démontrer, de la même façon, que

$$\frac{|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2}\right).$$

**4.** Déduire des deux questions précédentes que

$$\frac{|ab|+|cd|}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}} \leqslant 1.$$

**5.** En utilisant l'inégalité triangulaire, en déduire que

$$|ab+cd| \leqslant \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}.$$

**6.** Soit $x$ et $y$ deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Montrer que $x^2 \leqslant y^2$.

**7.** Conclure.