Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 15 octobre 2025

1. Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^2 - 2x - 3$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 3$ d'inconnue x. On simplifiera l'expression des solutions de sorte à ne plus avoir de dénominateur

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|P(x)| = 3$ d'inconnue x.

c. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $P(x)$ en fonction de x et en déduire l'ensemble A des réels x tels que $P(x) \geqslant 0$ et l'ensemble B des réels x tels que $P(x) < 0$.

2. a. Démontrer que, pour tous réels a et b,

$$|a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b.$$

b. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|-2x^2 + 9x - 7| = |x^2 - 2x - 3|$ d'inconnue x. Déduire de la question précédente que, pour tout réel x,

$$(E) \iff 3x^2 - 11x + 4 = 0 \text{ ou } x^2 - 7x + 10 = 0$$

puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

3. On considère sur $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $|-2x^2 + 9x - 7| < |x^2 - 2x - 3|$ d'inconnue x.

a. Démontrer que, pour tout $x \in A$,

$$(I) \iff x^2 - 7x + 10 < 0 \text{ et } 0 < 3x^2 - 11x + 4.$$

b. En déduire que l'ensemble des solutions de (I) sur A est $\left]\dfrac{11 + \sqrt{73}}{6}\,;5\right[$.

c. Résoudre de même (I) sur B.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (I) sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. a. Pour tout réel x,

$$P(x) = 5 \iff x^2 - 2x - 3 - 3 = 0 \iff x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - 2x - 6 = 0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-6) = 28 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 6 = 0$ possède deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{28}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{28}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2} = 1 + \sqrt{7}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } P(x) = 3 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \{1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\}}$.

b. Pour tout réel x,

$$|P(x)| = 3 \iff P(x) = 3 \text{ ou } P(x) = -3.$$

On a vu que l'ensemble des solutions de $P(x) = 3$ est $\{1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\}$.
Déterminons l'ensemble des solutions de $P(x) = -3$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} P(x) = -3 &\iff x^2 - 2x - 3 + 3 = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } |P(x)| = 3 \text{ est } \{1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}, 0, 2\}}$.

c. Le discriminant de P est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc P possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit de la question précédente que $\boxed{A =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[\text{ et } B =]-1\,;3[}$.

2. a. Soit a et b deux réels.
Supposons que $|a| = |b|$. Si b est positif alors $a = b$ ou $a = -b$ et, si b est négatif, alors $a = -b$ ou $a = -(-b) = b$. Ainsi, dans tous les cas, $a = b$ ou $a = -b$.
Réciproquement, supposons que $a = b$ ou $a = -b$. Si $a = b$ alors $|a| = |b|$ et, si $a = -b$ alors $|a| = |-b| = |b|$ donc, dans tous les cas, $|a| = |b|$.
Ainsi, on a montré que

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R} \quad |a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b}.$$

b. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (E) &\iff -2x^2 + 9x - 7 = x^2 - 2x - 3 \text{ ou } -2x^2 + 9x - 7 = -(x^2 - 2x - 3) \\ &\iff 0 = x^2 - 2x - 3 - (-2x^2 + 9x - 7) \text{ ou } 0 = -x^2 + 2x + 3 - (-2x^2 + 9x - 7) \\ &\iff 0 = 3x^2 - 11x + 4 \text{ ou } x^2 - 7x + 10 = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (E) \iff 3x^2 - 11x + 4 = 0 \text{ ou } x^2 - 7x + 10 = 0}.$$

Le discriminant de $3x^2-11x+4$ est $\Delta=(-11)^2-4\times3\times4=73>0$ donc l'équation $3x^2-11x+4=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-(-11)-\sqrt{73}}{2\times3}=\frac{11-\sqrt{73}}{6}\quad\text{et } x_2=\frac{-(-11)+\sqrt{73}}{2\times3}=\frac{11+\sqrt{73}}{6}.$$

Le discriminant de $x^2-7x+10$ est $\Delta=(-7)^2-4\times1\times10=9>0$ donc l'équation $x^2-7x+10=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_3=\frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\times1}=2\qquad\text{et } x_4=\frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\times1}=5.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est } \left\{\frac{11+\sqrt{73}}{6},\frac{11-\sqrt{73}}{6},2,5\right\}}$.

3. a. Pour tout $x\in A$, $P(x)\geqslant0$ donc $|P(x)|=P(x)$. Ainsi, pour tout $x\in A$,

$$\begin{aligned}(I)&\iff\left|-2x^2+9x-7\right|<x^2-2x-3\\&\iff-(x^2-2x-3)<-2x^2+9x-7<x^2-2x-3\\&\iff-x^2+2x+3<-2x^2+9x-7\text{ et }-2x^2+9x-7<x^2-2x-3\\&\iff-x^2+2x+3-(-2x^2+9x-7)<0\text{ et }0<x^2-2x-3-(-2x^2+9x-7)\\&\iff-x^2+2x+3+2x^2-9x+7<0\text{ et }0<x^2-2x-3+2x^2-9x+7\\&\iff x^2-7x+10<0\text{ et }0<3x^2-11x+4\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\forall x\in A\quad(E)\iff x^2-7x+10<0\text{ et }0<3x^2-11x+4}.$$

b. On a vu dans la question **2.b.** que le trinôme $x^2-7x+10$ a pour racines réelles 2 et 5 donc, comme $a=1>0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^2-7x+10<0$ est $C=]2\,;5[$.
De même, on a vu que le trinôme $3x^2-11x+4$ a pour racines réelles les nombres $\frac{11+\sqrt{73}}{6}$ et $\frac{11-\sqrt{73}}{6}$ donc, comme $a=3>0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $3x^2-11x+4>0$ est $D=\left]-\infty\,;\frac{11-\sqrt{73}}{6}\right[\cup\left[\frac{11+\sqrt{73}}{6}\,;+\infty\right[$.
Dès lors, comme $\frac{11-\sqrt{73}}{6}\approx0{,}5$ et $\frac{11+\sqrt{73}}{6}\approx3{,}2$, l'ensemble des réels x tels que $x^2-7x+1<0$ et $3x^2-11x+4>0$ est $C\cap D=\left]\frac{11+\sqrt{73}}{6}\,;5\right[$. De plus, $A=]-\infty\,;-1]\cup[3\,;+\infty[$ donc $C\cap D\subset A$.
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ sur } A \text{ est } \left]\frac{11+\sqrt{73}}{6}\,;5\right[}$.

c. Pour tout $x\in B$, $P(x)<0$ donc $|P(x)|=-P(x)$. Ainsi, pour tout $x\in B$,

$$\begin{aligned}(I)&\iff\left|-2x^2+9x-7\right|<-(x^2-2x-3)\\&\iff x^2-2x-3<-2x^2+9x-7<-(x^2-2x-3)\\&\iff x^2-2x-3<-2x^2+9x-7\text{ et }-2x^2+9x-7<-x^2+2x+3\\&\iff x^2-2x-3-(-2x^2+9x-7)<0\text{ et }0<-x^2+2x+3-(-2x^2+9x-7)\\&\iff x^2-2x-3+2x^2-9x+7<0\text{ et }0<-x^2+2x+3+2x^2-9x+7\\&\iff 3x^2-11x+4<0\text{ et }0<x^2-7x+10\end{aligned}$$

Comme précédemment, l'ensemble des solutions de $3x^2 - 11x + 4 < 0$ est $E = \left]\dfrac{11-\sqrt{73}}{6}\,;\dfrac{11+\sqrt{73}}{6}\right[$ et l'ensemble des solutions de $x^2 - 7x + 10 > 0$ est $F =]-\infty\,;2[\cup]5\,;+\infty[$. On en déduit que l'ensemble des réels x tels que $3x^2 - 11x + 4 < 0$ et $x^2 - 7x + 10 > 0$ est $E \cap F = \left]\dfrac{11-\sqrt{73}}{6}\,;2\right[$. Or, $B =]-1\,;3[$ donc $E \cap F \subset B$ et ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ sur } B \text{ est } \left]\dfrac{11-\sqrt{73}}{6}\,;2\right[}$.

d. Pour tout réel x, $x \in A$ ou $x \in B$ donc on déduit des questions précédentes que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left]\dfrac{11-\sqrt{73}}{6}\,;2\right[\cup \left]\dfrac{11+\sqrt{73}}{6}\,;5\right[}$.