Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 16 octobre 2024

1. Pour tout réel m, on pose $P(m) = m^2 - 3m + 2$.

a. Déterminer l'ensemble des racines de P.

b. Déterminer, pour tout réel m, le signe de $P(m)$ en fonction de m.

2. Soit un réel $m > \dfrac{2}{3}$. On pose, pour tout réel x,

$$f_m(x) = (3m-2)x^2 + (8m-4)x + 5m - 1.$$

a. Vérifier que le discriminant Δ_m de f_m est égal à $4P(m)$ où P est le polynôme défini dans la question **1.**.

b. En déduire que le trinôme f_m possède deux racines réelles x_1 et x_2 si et seulement si $m \in \left]\dfrac{2}{3}\,;1\right[\cup\,]2\,;+\infty[$. On vérifiera que, dans ce cas,

$$x_1 = \frac{2-4m-\sqrt{P(m)}}{3m-2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-4m+\sqrt{P(m)}}{3m-2}$$

avec $x_1 < x_2$.

c. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f_m(x)$ en fonction de x. On distinguera plusieurs cas selon la valeur de m.

Pour tout réel $m > \dfrac{2}{3}$ et tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, on pose

$$A_m(x) = \frac{(5m-2)x+6m}{2x+1} \qquad \text{et} \qquad B_m(x) = \frac{mx+m+1}{x+1}.$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $m = 1$.

a. Calculer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_1(x) - B_1(x)$ et en déduire que $A_1(x) - B_1(x)$ est du même signe de $(2x+1)(x+1)$.

b. Étudier, pour tout réel x, le signe de $(2x+1)(x+1)$ puis, comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_1(x)$ et $B_1(x)$ en fonction de x.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel quelconque strictement supérieur à $\dfrac{2}{3}$.

4. Vérifier que, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x) - B_m(x) = \dfrac{f_m(x)}{(2x+1)(x+1)}$ où f_m est défini dans la question **2.**.

5. Comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x)$ et $B_m(x)$ lorsque $m \in [1\,;2]$.

6. On suppose que $m \in \left]\dfrac{2}{3}\,;1\right[\cup\,]2\,;+\infty[$.

a. Justifier que $0 < P(m) < m^2$ et en déduire que $x_2 < -1$.

b. Comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x)$ et $B_m(x)$ en fonction de x.

Solution.

1. a. Le discriminant de P est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 1 > 0$ donc le trinôme P possède deux racines réelles :

$$m_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des racines de } P \text{ est } \{1\,;2\}}$.

b. Comme $\Delta > 0$ et $a = 1 > 0$, on déduit du résultat de la question précédente que $\boxed{P(m) \geqslant 0 \text{ si } m \in]-\infty\,;1] \cup [2\,;+\infty[\text{ et } P(m) \leqslant 0 \text{ si } m \in [1\,;2]}$.

2. a. Le discriminant de f_m est

$$\begin{aligned}
\Delta_m &= (8m-4)^2 - 4(3m-2)(5m-1)\\
&= (8m)^2 - 2 \times 8m \times 4 + 4^2 - 4(15m^2 - 3m - 10m + 2)\\
&= 64m^2 - 64m + 16 - 4(15m^2 - 13m + 2)\\
&= 64m^2 - 64m + 16 - 60m^2 + 52m - 8\\
&= 4m^2 - 12m + 8\\
&= 4(m^2 - 3m + 2)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Delta_m = 4P(m)}$.

b. Comme $4 > 0$, pour tout $m \in \mathcal{D}$, le signe de Δ_m est le signe de $P(m)$. Ainsi, f_m possède deux racines réelles si et seulement si $P(m) > 0$. On déduit alors de la question **1.** que $\boxed{f_m \text{ possède deux racines réelles si et seulement si } m \in \left]\frac{2}{3}\,;1\right[\cup]2\,;+\infty[}$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-(8m-4) - \sqrt{4P(m)}}{2(3m-2)} & \text{et } x_2 &= \frac{-(8m-4) + \sqrt{4P(m)}}{2(3m-2)}\\
&= \frac{-2(4m-2) - 2\sqrt{P(m)}}{2(3m-2)} & &= \frac{-2(4m-2) + 2\sqrt{P(m)}}{2(3m-2)}\\
&= \frac{2 - 4m - \sqrt{P(m)}}{3m-2} & &= \frac{2 - 4m + \sqrt{P(m)}}{3m-2}
\end{aligned}$$

Or, comme $\sqrt{P(m)} > 0$, $2 - 4m - \sqrt{P(m)} < 2 - 4m + \sqrt{P(m)}$ et, comme $m > \frac{2}{3}$, $3m - 2 > 0$ donc, finalement, $\boxed{x_1 < x_2}$.

c. Si $m \in [1\,;2]$, $P(m) \leqslant 0$ donc, pour tout réel x, $f_m(x)$ est du signe de $a = 3m - 2 > 0$ donc, $\boxed{\text{si } m \in [1\,;2],\ f_m(x) \geqslant 0 \text{ pour tout réel } x}$.

Si $m \in \left]\frac{2}{3}\,;1\right[\cup]2\,;+\infty[$ alors f_m possède deux racines réelles x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$ et $f_m(x)$ est du signe de $a = 3m - 2 > 0$ à l'extérieur des racines donc on conclut que $\boxed{\text{si } m \in \left]\frac{2}{3}\,;1\right[\cup]2\,;+\infty[,\ f_m(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;x_1] \cup [x_2\,;+\infty[\text{ et } f_m(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in [x_1\,;x_2]}$.

3. a. Pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$,

$$\begin{aligned}A_1(x)-B_1(x) &= \frac{3x+6}{2x+1}-\frac{x+2}{x+1}\\ &= \frac{(3x+6)(x+1)-(2x+1)(x+2)}{(2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{3x^2+3x+6x+6-(2x^2+4x+x+2)}{(2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{x^2+4x+4}{(2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{(x+2)^2}{(2x+1)(x+1)}\end{aligned}$$

donc $\boxed{A_1(x)-B_1(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(2x+1)(x+1)}}$.

4. Or, pour tout réel x, $(x+2)^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{le signe de } A_1(x)-B_1(x) \text{ est le signe de } (2x+1)(x+1)}$.

Pour étudier le signe de $(2x+1)(x+1)$, qui est un produit de deux facteurs affines, on utilise un tableau de signe.

<u>Pour $2x+1$</u> : $a=2>0$ et $b=1$ donc $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{2}$.

<u>Pour $x+1$</u> : $a=1>0$ et $b=1$ donc $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{1}=1$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(2x+1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que, pour tout $x \in]-\infty\,;-1[\cup\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $A_1(x)-B_1(x)\geqslant 0$ et, pour tout $x\in\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right[$, $A_1(x)-B_1(x)\leqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-\infty\,;-1[\cup\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[,\ A_1(x)\geqslant B_1(x)}$ et, $\boxed{\text{pour tout } x\in\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right[,\ A_1(x)\leqslant B_1(x)}$.

5. Pour tout $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$,

$$\begin{aligned}A_1(x)-B_1(x) &= \frac{((5m-2)x+6m)(x+1)-(mx+m+1)(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{(5m-2)x^2+(5m-2)x+6mx+6m-(2mx^2+mx+2mx+m+2x+1)}{(2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{(3m-2)x^2+(8m-4)x+5m-1}{(2x+1)(x+1)}\end{aligned}$$

donc $\boxed{A_m(x)-B_m(x)=\dfrac{f_m(x)}{(2x+1)(x+1)}}$.

6. Si $m \in [1\,;2]$ alors, d'après la question **2.c.**, $f_m(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. Dès lors, le signe de $A_1(x) - B_1(x)$ est le même que le signe de $(2x+1)(x+1)$ et comme précédemment, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[,\ A_1(x) \geqslant B_1(x)}$ et, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left[-1\,;-\frac{1}{2}\right],\ A_1(x) \leqslant B_1(x)}$.

7. Comme $m \notin [1\,;2]$, d'après la question **1.**, $P(m) > 0$. De plus, comme $m > \dfrac{2}{3}$, $3m > 2$ donc, en multipliant par $-1 < 0$, $-3m < -2$ donc $-3m+2 < 0$ et finalement $m^2 - 3m + 2 < m^2$. Ainsi, $\boxed{0 < P(m) < m^2}$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $0 < \sqrt{P(m)} < \sqrt{m^2}$ donc $\sqrt{P(m)} < |m|$ et, comme $m > 0$, $\sqrt{P(m)} < m$. Par suite, $2 - 4m + \sqrt{P(m)} < 2 - 4m + m$ i.e. $2 - 4m + \sqrt{P(m)} < 2 - 3m$ et, en divisant par $3m - 2 > 0$, on conclut que $x_2 < \dfrac{2-3m}{3m-2}$ i.e. $\boxed{x_2 < -1}$.

En utilisant les résultats des questions **2.c.** et **3.a.**, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f_m(x)$		+	0	−	0	+		+		+	
signe de $(2x+1)(x+1)$		+		+		+	0	−	0	+	
signe de $\dfrac{f_m(x)}{(2x+1)(x+1)}$		+	0	−	0	+	‖	−	‖	+	

On conclut comme ci-dessus que $\boxed{A_m(x) \geqslant B_m(x) \text{ si } x \in \left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left[x_2\,;-1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$ et $\boxed{A_m(x) \leqslant B_m(x) \text{ si } x \in [x_1\,;x_2] \cup \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[}$.