Devoir à la maison n°2

À rendre le mercredi 16 octobre 2024

1. Pour tout réel m, on pose $P(m) = m^2 - 3m + 2$.

a. Déterminer l'ensemble des racines de P.

b. Déterminer, pour tout réel m, le signe de $P(m)$ en fonction de m.

2. Soit un réel $m > \dfrac{2}{3}$. On pose, pour tout réel x,

$$f_m(x) = (3m-2)x^2 + (8m-4)x + 5m - 1.$$

a. Vérifier que le discriminant Δ_m de f_m est égal à $4P(m)$ où P est le polynôme défini dans la question **1.**.

b. En déduire que le trinôme f_m possède deux racines réelles x_1 et x_2 si et seulement si $m \in \left]\dfrac{2}{3}\,;1\right[\cup]2\,;+\infty[$. On vérifiera que, dans ce cas,

$$x_1 = \frac{2-4m-\sqrt{P(m)}}{3m-2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-4m+\sqrt{P(m)}}{3m-2}$$

avec $x_1 < x_2$.

c. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f_m(x)$ en fonction de x. On distinguera plusieurs cas selon la valeur de m.

Pour tout réel $m > \dfrac{2}{3}$ et tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, on pose

$$A_m(x) = \frac{(5m-2)x+6m}{2x+1} \qquad \text{et} \qquad B_m(x) = \frac{mx+m+1}{x+1}.$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $m = 1$.

a. Calculer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_1(x) - B_1(x)$ et en déduire que $A_1(x) - B_1(x)$ est du même signe de $(2x+1)(x+1)$.

b. Étudier, pour tout réel x, le signe de $(2x+1)(x+1)$ puis, comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_1(x)$ et $B_1(x)$ en fonction de x.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel quelconque strictement supérieur à $\dfrac{2}{3}$.

4. Vérifier que, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x) - B_m(x) = \dfrac{f_m(x)}{(2x+1)(x+1)}$ où f_m est défini dans la question **2.**.

5. Comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x)$ et $B_m(x)$ lorsque $m \in [1\,;2]$.

6. On suppose que $m \in \left]\dfrac{2}{3}\,;1\right[\cup]2\,;+\infty[$.

a. Justifier que $0 < P(m) < m^2$ et en déduire que $x_2 < -1$.

b. Comparer, pour tout réel $x \notin \{-1\,;-\frac{1}{2}\}$, $A_m(x)$ et $B_m(x)$ en fonction de x.